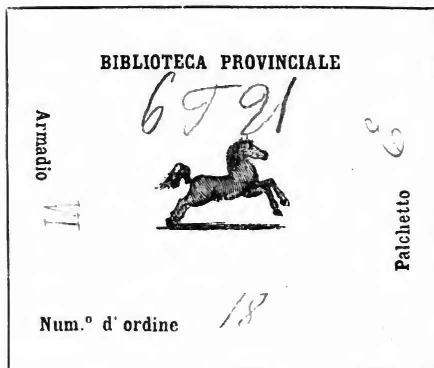
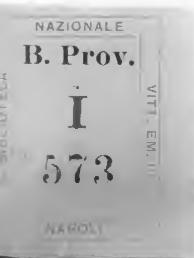
RACCOLTA DI TEORIE DIVERSE ESPOSTE SOTTO L'ENUNCIAZIONE DI QUEI PROBLEMI...




FONDO PIZZOFALCONE


BIBLIOTECA PROVINCIALE
6 T 21
Armadio
VI
Palchetto
Num.° d' ordine 18


NAZIONALE
B. Prov.
I
573
VITT. EM. II
NAPOLI

RACCOLTA

DI TEORIE DIVERSE

Esposte sotto l'enunciazione di quei Problemi che son dati a risolvere nelle Lezioni di Matematiche dell'Ab. Marie

DEL

CAV. SAMMARTIND





Tomo II.






CATANIA 1808.



NELLE STAMPE DEL BISAGNI
CON APPROVAZIONE.







Seguito delle Teorie esposte sotto l' enunciazione de' Problemi delle Lezioni proposti al fine dell' Algebra.



PROB. 38.

Con monete di 10 e di 5 paoli in quanti modi può farsi la somma di paoli 405?

171. Chiamando x le monete di 10 paoli, ed y quelle di 5 paoli, noi avremo l' equazione di condizione $10x+5y=405$: donde otterremo $y=81-2x$.

I valori di x, y debbono essere positivi. Quindi i valori di x che rendono y positivo essendo quei soli che soddisfanno all' enunciazione proposta fa che il problema ammetta soltanto un numero finito di soluzioni, e che sia del genere perciò di quei che si dicono semi-determinati. Facendo intanto $x=0=1=2=$ ec. avremo successivamente $y=81=79=77=$ ec. ma non potendo essere $x>40$, poichè y diverrebbe in diverso caso negativo, conchiuderemo che il problema non può avere che 41 soluzioni solamente.



PROB 39.

Quali sono i numeri multipli di 7 che divisi per 4, 5, e 6 danno 1 di resto?

172. Chiamo x i numeri che multiplicati per 7 danno i cercati, e ne avrò per condizione l' equazioni $\frac{7x-1}{4}=E$, $\frac{7x-1}{5}=E'$, $\frac{7x-1}{6}=E''$: da cui ne ottengo

$$x=\frac{4E+1}{7},\ x=\frac{5E'+1}{7},\ x=\frac{6E''+1}{7}.$$

Paragonando i primi due valori di x ne ho $E'=E-\frac{1}{5}E$: locchè mi dice essere $\frac{1}{5}E$ un numero intero. Quindi marcando sempre con E' un intero, faccio $E'=E-\frac{1}{5}E=\frac{1}{5}E$, cioè $E=5E$: Onde ho $x\left(=\frac{4E+1}{7}\right)=\frac{20E''+1}{7}$: Passo quindi al paragone di questo col terzo valor di x, ed ottengo $E'=9E''$, ed $x=\frac{60E''+1}{7}$.

173. Tutti i valori interi che dati ad E'' rendono un intero questo valor di x vengono a soddisfare alla domanda enunciata. Il carattere ed il progresso de' valori di E'' facilmente si rileva dal valore di x, poichè un valore di E'' non può dare un intero per x se non differisce di 7 da un altro che precedentemente lo ha dato. Quindi i valori di E'' debbono formare una serie a differenze, che abbia $d=7$, e che niuna circostanza limitando i valori di x, può essa estendersi all'infinito: locchè ci dice che infinite sono le soluzioni del problema proposto. Il tutto si riduce adunque a trovare il più picciolo valore di E'' il quale ci dà x intero, cioè il primo termine di questa serie. Se escludiamo i numeri negativi, in quanto E'' dee essere positivo, e supponiamo successivamente $E''=1=2=$ ec; troveremo che 5 è questo numero: donde deduremo la serie de' valori di E''...5, 12, 19, 26, 33, 40, ec; e quindi la serie de' valori di x... 301, 721, 1141, ec.

PROB. 40.

Certi forestieri spesero 20 lire in una locanda a ragione di 4 lire per padrone, di 40 soldi

per servidore, e di 30 soldi per cavallo: quanti erano i padroni x, *i servidori* y, *ed i cavalli* z?

174. Riducendo i soldi in parte della lira avremo per condizione enunciata l'equazione

$$4x + 2y + \frac{3}{2}z = 20 : \text{donde } y = 10 - 2x - \frac{3}{4}z.$$

Questo valor di y dipende dalle due indeterminate x, z, e perciò ad ogni valore dell'una vene possono corrispondere diversi per l'altre. Osservando però il valor trovato per y, vi scorgo che qualunque sia quello di z, non potrà mai farsi x maggiore di 3, poichè y risulterebbe in diverso caso o fratto, o negativo, che è contro la condizione proposta. I forestieri adunque non possono essere più di 3, ma possono essere bensì 2, o un solo, se si combina diversamente il numero de' servidori, e cavalli.

175. Per venire alla determinazione de' varj casi delle diverse combinazioni, si faccia successivamente $x = 1 = 2 = 3$, e sene avranno le tre

equazioni $y = 8 - \frac{3}{4}z$, $y = 6 - \frac{3}{4}z$, $y = 4 - \frac{3}{4}z$.

La soluzione in numeri intieri di queste equazioni si riduce a dare a z de' valori tali, onde

rendere intero $\frac{3}{4}z$; e la soluzione in numeri positivi dall'escludere per z quei valori che darebbero $\frac{3}{4}z =$, o > 4, $=$, o > 6, $=$, o > 8. Per soddisfare quindi alla prima di queste condizioni basta far z multiplo di 4, cioè supporre $z = 4E$: onde quelle tre equazioni divengono $y = 8 - 3E$, $y = 6 - 3E$, $y = 4 - 3E$; e per soddisfare alla seconda queste equazioni ci avvertono che E non può supporsi > 2, cioè che può farsi solamente $E = 1 = 2$; e quindi che con un sol padrone si possono avere due combinazioni di servidori, e cavalli, ed una sola quando son due o tre i padroni. Quali sono queste cominazioni? Niente più facile di questo. Sono infatti...

$x = 1, y = 5$ o 2, $z = 4$ o 8

$x = 2, y = 3, z = 4$

$x = 3$ $y = 1, z = 4$

PROB. 41.

E' egli possibile di far 19 lire con monete di 24 soldi, di 12 soldi, e di 6 soldi?

176. Per conoscere la possibilità dell'enunciato rifletto che una è la condizione proposta, e che chiamando x, y, z le tre diverse specie di moneta ho $24x+12y+6z=380$: donde...

$$z=\frac{380-24x-12y}{6}=63-4x-2y+\frac{1}{3}.$$ Questo risultato è quello che pronuncia sulla dimanda in questione, cioè che x, y, z debbono esser de' numeri interi. Qualunque valore intero si darà ad x, y è chiaro che mai potrà aversene un altro per z. Quindi conchiudo che la condizione enunciata giammai potrà avverarsi, e conchiudo perciò l'impossibilità del problema.

PROB. 42.

Esprimere più semplicemente per approssimazione il rotto 0, 5715.

177. Per eseguire quanto ci viene proposto, osservo che il rotto $0,5715=\frac{1143}{2000}=\frac{x}{y}$; e che

però $y = x + \frac{857x}{1143}$. Per essere y intero bisogna esserlo ancora $\frac{857x}{1143}$. Per essere intiero $\frac{857x}{1143}$ (in cui 857, 1143 si suppongono ridotti per condizione del metodo ad essere primi tra loro), bisogna che x sia multiplo di 1143; per essere x un multiplo di 1143, bisogna che sia $= 1143p$ locchè ci dà $y = 2000p$, e però $\frac{x}{y}$ sempre $= \frac{1143}{2000}$.

Se vogliamo però esprimere più semplicemente il rotto proposto uop' è ricorrere all' approssimazione; poichè le condizioni, onde rigorosamente esprimerlo non ci hanno ridotto che alla frazione medesima espressa ne' termini stessi in cui è stata proposta. Quindi noto con $\pm n$ il più picciolo numero di unità che aggiunto ad $857x$ dia per $\frac{857x \pm n}{1143}$ un numero intero, suppongo cioè $\frac{857x \pm n}{1143} = E$: donde ottengo $x = E + \frac{286E \mp n}{857}$,

e però $\frac{286E\mp n}{857}=E'=$ (moltiplicandone per 3 il numeratore, che senza contrastare la condizione di essere intero, mi dà E, giusta i precetti del metodo già dettagliato dell' autore, col coefficiente 1.)

$=\frac{858E\mp 3n}{857}=E+\frac{E\mp 3n}{857}=\frac{E\mp 3n}{857}$, e però

$E=857E'\pm 3n$, $x=1143E'\pm 4n$, $y=2000E'\pm 7n$

ed $\frac{x}{y}=\frac{1143E'\pm 4n}{2000E'\pm 7n}$.

178 La condizione enunciata di doversi esprimere più semplicemente, cioè in termini i più piccioli, per approssimazione il rotto proposto è quella che ci prescrive di dover essere $x<1143$, ed $y<2000$; ed è quella perciò, che permettendoci nel caso del segno superiore di non poter suporre che solo $E'=0$ ci limita al solo risultato $\frac{x}{y}=\frac{4}{7}$. Perciò che riguarda poi il caso del segno inferiore si faccia successivamente $E'=0=1=3=$ ec. e se ne avrà

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{7} = \frac{1143 - 4n}{2000 - 7n} = \frac{2.1143 - 4n}{2.2000 - 7n}$$

$$= \frac{3.1143 - 4n}{3.2000 - 7n} = \frac{4.1143 - 4n}{4.2000 - 7n} = \text{ec.}$$

ovvero

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{7} = \frac{4}{7} \cdot \frac{285 + \frac{3}{4} - n}{285 + \frac{5}{7} - n}, \text{ o } \frac{4}{7} \cdot \frac{286 - \frac{1}{4} - n}{286 - \frac{2}{7} - n}$$

$$= \frac{4}{7} \cdot \frac{2(285 + \frac{3}{4}) - n}{2(285 + \frac{5}{7}) - n}, \text{ o } \frac{4}{7} \cdot \frac{2(286 - \frac{1}{4}) - n}{2(286 - \frac{2}{7}) - n}$$

$$= \frac{4}{7} \cdot \frac{3(285 + \frac{3}{4}) - n}{3(285 + \frac{5}{7}) - n}, \text{ o } \frac{4}{7} \cdot \frac{3(286 - \frac{1}{4}) - n}{3(286 - \frac{2}{7} - n}$$

$$= \frac{4}{7} \cdot \frac{4(286 + \frac{3}{4}) - n}{4(286 + \frac{5}{7}) - n}, \text{ o } \frac{4}{7} \cdot \frac{4(286 - \frac{1}{4}) - n}{4(286 - \frac{2}{7}) - n}$$

$= \text{ec.}$ ec.

Quindi facendo passar n per tutti i termini della serie de' numeri naturali è facile il convincersi che il numeratore e denominatore in ciascuna di queste formule particolari de' valori di $\frac{x}{y}$ saranno fino ad un certo stato positivi, e poi si muteranno in negativi; che questa mutazione succede simultaneamente, cioè per un istesso valor di n; che fra tutti i valori di cui esse sono singolarmente capaci, i più semplici sono i contigui a questa mutazione; che i valori contigui a questa mutazione per tutte le formule di cui si parla sono $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{2}$; che finalmente sentendosi con n il numero più picciolo di unità, quale aggiunto o sottratto da $857x$ lo rende un multiplo di 1143, e perciò dovendo esser sempre $n < 1143$, ne avviene che fino alla terza di queste formule inclusivamente si può arrivare a questa mutazione, e però i rispettivi valori più semplici di cui son le altre capaci non possono essere che meno semplici, cioè espressi in termini più grandi, de' più semplici di queste.

Quindi dietro a queste riflessioni io conchiudo che i valori più semplici fra tutti i possibili di $\frac{x}{y}$ sono $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{2}$, fra i quali essendo il primo quello che più si avvicina al rotto proposto, fa che io ancora conchiuda e finisca col dire che $\frac{4}{7}$ è l'espressione cercata.

PROB. 42.

Correndo 9 di Cielo Solare, e Lunare, e 2 d'Indizione apparve in Cielo una grande, e singolar Cometa. Che Anno era?

179. Senza entrare ne' dettagli sulla posizione relativa che il Sole e la Luna riprendono in ogni ricominciamento commune de' primi due Cicli; senza assegnar le ragioni per cui in Atene sene scolpì a caratteri d'oro il secondo; senza ricordar gli argomenti, onde indussero i Romani ad immaginar l' Indizione ne' regolamenti Civili; senza entrare in tuttociò, perchè straniero al nostro soggetto, mi contento il prevenire soltanto che tali Cicli son tre periodi di 28, 19, e 15 anni; che dal loro prodotto sene formò un quarto di 7980, detto Giuliano, onde

rapportarvi tutti gli avvenimenti; e che l'epoca dell'apparizione enunciata si suppone rapportata all' Era di questo periodo. Quindi passo a chiamare x l'anno cercato, il quale contenendo per condizione un numero intero di Cicli Solari e Lunari più 9, ed un numero intero di periodi d'Indizione più 3, mi dà le tre equazioni

$$\frac{x-9}{28}=E, \frac{x-9}{19}=E', \frac{x-3}{15}=E''.$$

180. Dalla prima ho un valore di x che sostituito nella seconda mi dà

$$\frac{28E}{19}=E'=\frac{9E}{19}=\frac{-E}{19}=\frac{E}{19}, \text{ e però } E=19E',$$

e dalla prima $x=532E'+9$. Sostituito nella terza questo valor di x, ne ho

$$\frac{532E'+6}{15}=E''=\frac{7E'+6}{15}=\frac{-E'+12}{15}=\frac{E'-12}{15}, \text{ e}$$

però $E'=15E''+12$, ed alla $x=7980E''+6393$.

181. Se osserviamo questo risultato, vedremo che qualunque sia il valore di E'' si avrà sempre per x un certo numero intero di periodi Giuliani più 6393 anni. Quindi l' anno 6393 è quello da noi cercato. Per ridurre quest'anno Giuliano a quello dell' Era Volgare, basta avvertire che l'epoca di quello, precede quella di questo di

4712 anni, onde conchiudere che il 1680 si fu l'anno dell' apparizione della Cometa enunciata: Cometa assai famosa negli annali Astronomici per essersi più appressata di noi 166 volte al centro del suo e nostro sistema; per aver concepito perciò un calor sì bruciante che il Nevvton per darne un' idea lo stimò 2000 volte più grande che in un ferro rovente; per aver portato una coda che occupava quasi l' intero emisfero; per essere stata insomma una delle più sorprendenti tra l'osservate sin'ora.

PROB. 44:

Dimostrare il teorema enunciato (l.415) *cioè che tutti i valori indipendenti l' uno dall'altro di*

$$\frac{x^2 - b}{p} \text{ son tutti } < \pm(\frac{1}{4} p + 1)$$

182. La formula proposta non è che un caso particolare della

$$\frac{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots t}{D},$$

di cui abbiamo parlato ne' numeri (35 ... 38) Quindi è che dimostrando il teorema enunciato per questa formula generale, noi l'avremo come un corollario per quella in essa proposta. Per

venire a capo di questa dimostrazione io ricorro a quanto si disse ne' numeri citati. Noi sappiamo da questi numeri che i valori indipendenti di x onde si abbia per $\frac{ax^{m}+bx^{m-1}+cx^{m-2}+\ldots t}{D}$ un numero intero, onde si abbia cioè

$$\frac{ax^{m}+bx^{m-1}+cx^{m-2}+\ldots t}{D}=E,$$

non oltrepassano $\frac{1}{2}D$ tanto in senso positivo che negativo. Quindi se supponiamo per ora tutti positivi i termini di essa, e vi mettiamo $\frac{1}{2}D$ per x, è chiaro che nel risultato

$$\frac{aD^{m-1}}{2^{m}}+\frac{bD^{m-2}}{2^{m-1}}+\frac{cD^{m-3}}{2^{m-2}}+\ldots\frac{t}{D}=E$$

avremo un limite superiore di tutti i valori indipendenti l'uno dall'altro di cui E è capace. Se tutti i valori indipendenti di E son tutti minori di questo limite quando le parti della quantità proposta concorrono tutte a sommarsi, a fortiori tali dovranno esser quelli quando que-

ste parti non vanno ad una medesima somma. Considerando quindi in questo limite le sole quantità senza curarne i segni, esso lo sarà per tutti casi in cui $\frac{ax^{m} + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots t}{D}$ può trovarsi. Inoltre siccome i valori di E possono risultare sì positivi che negativi; così bisogna prendere questo limite sì coll'uno che coll'altro segno.

183. In questo limite possono darsi due casi, relativamente al suo ultimo termine, però essere cioè $t < D$, e $t > D$. Quando $t < D$ sarà $\frac{t}{D} < 1$, e sarà $\frac{t}{D} > 1$ quando $t > D$. Quindi nel primo caso tutti i valori indipendenti di E son tutti $< \pm \left(\frac{aD^{m-1}}{2^{m}} + \frac{bD^{m-2}}{2^{m-1}} + \ldots + 1\right)$, e possono esserlo sì minori che maggiori nel secondo.

Due maniere abbiamo adunque per conoscere gl'interi che presi per x rendono intera la quantità $\frac{ax^{m} + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots t}{D} = E$,

cioè col tentarvi per x tutti gl' interi $< \pm \frac{1}{2} D$, e quando $t < D$ col prendere per E tutti quelli

$$< \pm \left(\frac{aD^{m-1}}{2^m} + \frac{bD^{m-2}}{2^{m-1}} + \frac{cD^{m-3}}{2^{m-2}} + \ldots + 1 \right)$$

e dedurne in seguito con essi i valori di x. Questa seconda maniera non è generale quanto la prima, poichè suppone $t < D$; e sebbene in generale ci sembri più lunga e più indiretta, trattanto in qualche caso particolare si rende piu facile e pronta come presto vedremo.

184. Cade a proposito in questo luogo il vedere come sapendo rendere intera, quando è possibile, la quantità $\frac{ax^m + bx^{m-1} + \ldots t}{D}$ sappiamo assegnar la relazione che dee legare x ad y onde avere ancora per le quantità della forma $\frac{ax^m + bx^{m-1}y + cx^{m-2}y^2 + dx^{m-3}y^3 \text{ ec.}}{D}$ de' numeri interi. La dimostrazione di quest'altro teorema ci sarà utile nel progresso: vedila adunque; e notiamo con $y = nx - Dz$ questa relazione. Noi avremo

$$\frac{ax^m + bx^{m-1}y + cx^{m-2}y^2 + dx^{m-3}y^3 + \text{ec}.}{D}$$

$$= \frac{a + bn + cn^2 + dn^3 + \text{ec}.}{D}x^m -$$

$(bc + 2cn + 3dn^2 + \text{ec}.)x^{m-1}z + (c + 3dn + \text{ec}.)x^{m-2}Dz^2$ ec.

Se riguardiamo in questa serie x, D come primi tra loro, è chiaro che ci darà sempre de' valori interi quando intiero ne è il primo termine. Quindi i valori cercati per y sono tutti espressi dall'equazione $y = nx - Dz$, in cui x, D essendo primi tra loro, bisogna qualunque sia z prendere per n quei valori medesimi fissati di sopra onde avere per $\frac{a + bn + cn^2 + dn^3 + \text{ec}.}{D}$ de' numeri interi.

185. Applichiamo ormai il teorema dimostrato in generale alla formula proposta $y = \frac{x^2 - b}{p}$. Paragonando questa formula colla generale assunta in principio ne avremo $D = p$, $a = 1$, $m = 2$, $b = \text{ec}. = 0$, $t = b$, $E = y$, e però quando $b < p$ avre-

mo $\pm(\frac{1}{4}p+1)$ pel limite ſuperiore de'valori independenti di y. Quindi ſe in queſto caſo prendiamo tutti gl'interi $<\pm(\frac{1}{4}p+1)$ per y, e ne ricaviamo quelli di x ne ſcopriremo quelli che rendono intero $\frac{x^2-b}{p}$, oppure una pruova che in neſſun caſo può eſſere tale. Queſta maniera onde ſcoprire i valori di x ſebbene indiretta è più facile e pronta in queſto caſo particolare di quella più diretta, di prendere cioè per x tutti gl'interi $<\pm\frac{1}{2}D$. Infatti eſſendo $\frac{1}{4}p+1<\frac{1}{2}D$ il numero delle pruove è più riſtretto: è più riſtretto ancora perchè neppure biſogna che quelli $<\pm(\frac{1}{4}p+1)$ ſi provino tutti reſtando parte eſcluſi dal non poter eſſere x^2 negativo. Oltre che queſto numero è più riſtretto le operazioni in eſſo incluſe ſi eſeguiſcono con prontezza maggiore, poichè nel tempo che ſi evitano le diviſioni, la quantità $py+b$, cioè il valore di x^2, ſi ottiene per tutti i valori di y col ripetere ſomme ſoltanto, cioè col ſommare b a p, quindi aggiun-

rere sempre lo stesso p all' ultima somma, e riscontrar nella tavola de'numeri quadrati quali sono un quadrato.

PROB. 45.

Trovar due numeri x, y *la cui somma sia il quadrato di* $x^2 + y$.

126. L'equazione cui la condizione enunciata ci porta si è $x+y=x^4+2x^2y+y^2$; Questa equazione risoluta per y ci dà

$$y=-\frac{2x-1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}+x-x^2\right)}.$$

Non si tratta adunque che di rendere razionale

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}+x-x^2\right)}.$$

Per venirne a capo prendo la formula generale corrispondente $h+cy+fy^2=z^2$, che molticata per $4f$, ed aggiunto ad ambedue membri c^2 diviene $4f^2y^2+4fcy+c^2=c^2+4fz^2-4fh$:

donde $2fy+c=\sqrt{(c^2+4fz^2-4fh}=\sqrt{(k+lx^2)}$.
Tutta la difficoltà adunque consiste nel rendere

razionale $\sqrt{(k+lz^2)}$, cioè di risolvere l'equazione $\sqrt{(k+lz^2)}=Q$.

107. La soluzione generale di questa equazione non è dovuta che al de Lagrange. Noi ci contentiamo per ora di appoggiarla a qualche opportuna osservazione sull'equazione proposta, riservandoci di esporne ne' problemi qui appresso, in cui avremo occasione, la dottrina che quel sommo geometra ci ha esposta nelle memorie dell' Accademia di Berlino per gli anni 1767. 1768. e nel secondo volume degli elementi di algebra dell' Eulero.

108. Osservo adunque che il primo termine della quantità $\sqrt{(\frac{1}{4}+x-x^2)}$ da rendersi razionale, è un quadrato perfetto, e perciò ho

$m^2+px+qx^2=Q$; equazione che divisa per x^2 diviene $\frac{m^2}{x^2}+\frac{p}{x}=Q-q$, in cui compito a quadrato il primo membro (I.142), ci dà

$$x = \frac{2m^2}{\pm 2m\sqrt{\left(Q + \frac{p^2}{4m^2} - q\right)} - p} = (l. 418) \ldots$$

$$\frac{2m^2 Aa}{\pm m\left(A^2 \mp \left(\frac{p^2}{4m^2} - q\right)a^2\right) - pAa};$$

Quindi nel caso della proposta quantità, in cui $m = \frac{1}{2}$, $p = 1, q = -1$, e però $\frac{p^2}{4m^2} - q = 2$, sarà $x = \frac{Aa}{\pm(A^2 + 2a^2) - 2Aa}$; ed omettendo il segno inferiore che ci darebbe x negativo, avremo $x = \frac{Aa}{(A-a)^2 + a^2}$. Quindi

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4} + x - x^2\right)} = \frac{A^2 - 2a^2}{2((A-a)^2 + a^2)}$$

$$-\frac{2x^2 - 1}{2} = \frac{A^4 - 4A^3 a + 6A^2 a^2 - 8Aa^3 + 4a^4}{2((A-a)^2 + a^2)^2}$$

$$y = \frac{1}{2((A-a)^2+a^2)^2}\left(A^4-4A^3a+6A^2a^2-8Aa^3\right.$$
$$\left.+\,4a^4 \pm (A^2-2a^2)((A-a)^2+a^2)\right)$$

in cui il doppio segno è determinato ne' casi particolari di A, a, dalla condizione che y dee essere positivo.

PROB. 46.

Trovar due rotti razionali la cui somma, e il cui prodotto facciano due interi.

189. Sieno $\frac{x}{y}$, $\frac{u}{t}$ i due rotti razionali cercati onde abbiamo per condizioni $\frac{x}{y}+\frac{u}{t}=E$, $\frac{xu}{yt}=E'$, ovvero $tx+uy=Ety$, ed $ux=E'ty$. Quindi eliminando x dalla seconda per mezzo della prima, dividendone per y il risultato, e trattandone il quoziente giusta il metodo dell' equazioni quadratiche, ne avremo

$$u=\frac{1}{2}t(E\pm\sqrt{(E^2-4E')}) \text{ e però } \frac{u}{t}= \ldots$$

$$\frac{1}{2}(E\pm\sqrt{(E^2-4E')}),\ \frac{x}{y}=\frac{1}{2}(E\pm\sqrt{(E^2-4E')})$$

espressioni razionali quando si fa $E'=\frac{E^2-E''^2}{4}$

190. Sembra adunque che possono darsi due rotti razionali, onde soddisfare alle condizioni proposte: ma se osserviamo per poco l'espressioni, cui guidato ci hanno tali condizioni, ne vedremo tutta la illusione svanita. In effetto una radice numerica qualunque è pari, o impari, secondo che pari, o impari è il quadrato, cui essa appartiene. Quindi essendo $4E'$ sempre pari, sarà $\sqrt{(E^2 - 4E')}$ pari, o impari, secondo che pari, o impari sarà E. Quindi i due termini dell'espressioni trovate sono o tutti due pari, o tutti due impari, la di cui somma o differenza è sempre un numero pari, e però divisibile per 2. Quindi finalmente l'espressioni, che le condizioni enunciate ci diedero pe' rotti cercati, non sono che assolutamente intere.

Ecco come queste tre conseguenze ci mostrano che le condizioni proposte ci guidano a numeri razionali interi, e non rotti: come il calcolo ha rettificato la nostra falsa posizione: come possiamo quindi conchiuderne l'impossibilità dell'enunciata ricerca.

PROB. 47. 48.

Costruir le serie poste al numero (l.420)

Dimostrare che i risultati $+a, -b, +c, -$ *ec. son periodici.*

191. Il soggetto di questi problemi essendo unico ed indivisibile, fa che io venisse a trattarli insieme e a prevenire che nel progresso del dettaglio, avremo occasione a conoscere il contenuto de' teoremi propostovi.

192. Incomincio dall'avanzare che se in una equazione del secondo grado, le di cui radici non sono commensurabili, si prendono per x de'valori sempreppiù prossimi al vero, sene avrà una serie periodica di equazioni simili alla proposta. Noi l'andiamo a vedere sull'equazione completa

(a)... $mz^2+nz+h=o$, onde applicarne i risultati

all' incompleta $y^2-Ax^2=\frac{y^2}{x^2}-A=z^2-A=o$

proposta ne' problemi in questione.

193. Se nell' equazione (a) suppongo

$z=l+\frac{1}{z'}$, ne avrò la trasformata

(b) $m'z'^2+n'z'+m=o$, in cui $m'=ml^2+nl+h$, ed $n'=2ml+n$; Se in questa (b) suppongo ancora

$z' = l' + \frac{1}{z''}$ ne avrò la trasformata

$(c)\ m''z''^2 + n''z'' + m' = 0$ in cui $m'' = m'l'^2 + n'l' + m$, $n'' = 2m'l' + n'$; se pure in questa (c) suppongo $z'' = l'' + \frac{1}{z'''}$, ne avrò una terza trasformata

$(d) \ldots m'''z'''^2 + n'''z''' + m'' = 0$, in cui $m''' = m''l''^2 + n''l'' + m'$, ed $n''' = 2m''l'' + n''$, e così di seguito. Quindi da questa serie di equazioni (a), (b), (c), ec., avremo . . .

$$z = -\frac{n \mp \sqrt{(n^2 - 4mh)}}{2m} = -\frac{n \mp \sqrt{k}}{2m}$$

$$z' = -\frac{n' \mp \sqrt{(n'^2 - 4m'm)}}{2m'} = -\frac{n' \mp \sqrt{k'}}{2m'}$$

$$z'' = -\frac{n'' \mp \sqrt{(n''^2 - 4m''m')}}{2m''} = -\frac{n'' \mp \sqrt{k''}}{2m''}$$

$$z''' = -\frac{n''' \mp \sqrt{(n'''^2 - 4m'''m'')}}{2m'''} = -\frac{n''' \mp \sqrt{k'''}}{2m'''}$$

ec.

Due osservazioni ci faranno render più semplici questi valori. In fatti osservo I. che mettendo i valori di m', n'; m'', n''; m''', n'''; ec. ne' corrispondenti di k', k'', k''', ec. ne avremo $k' = k'' = k''' = n^2 - 4mh = k$: Osservo II. che $z = l + \frac{1}{z'} = l - \dots$

$$\frac{2m'}{n' \mp \sqrt{k'}} = l - \frac{2m'(n' \pm \sqrt{k'})}{n'^2 - k'} = \text{(mettendo} \dots$$

$n'^2 - 4nm'$ per k' e per l il suo valore ...

$$\frac{n' - n}{2m}) - \frac{n \pm \sqrt{k'}}{2m}.$$ Quindi conchiudo che la quantità k sotto il radicale è per tutti l'istessa, e che questo radicale ha segni alternativi. Quindi raccolgo tutte le formule già stabilite in una tavola, per cui prevengo che il segno $<$ vi esprime il numero intero prossimamente inferiore alla quantità cui precede e che $k = n^2 - 4mh$

(a)

$$m; \quad n; \quad z = -\frac{n+\sqrt{k}}{2m}; \qquad l < z$$

(b)

$$m' = ml^2 + nl + h; \; n' = 2ml + n; \; z' = -\frac{n' - \sqrt{k}}{2m'}$$

$$l' < z' \left(= \frac{1}{z - l} \right)$$

(c)

$$m'' = m'l'^2 + n'l' + m; \; n'' = 2m'l' + n; \; z'' = -\frac{n'' + \sqrt{k}}{2m''};$$

$$l'' < z'' \left(= \frac{1}{z' - l'} \right)$$

(d)

$$m''' = m''l''^2 + n''l'' + m'; \; n''' = 2m''l'' + n'';$$

$$z''' = -\frac{n''' - \sqrt{k}}{2m'''}; \; l''' < z''' \left(= \frac{1}{z'' - l''} \right)$$

. . . .

(f)

$$m^{(r)} = m^{(r-1)} l^{(r-1)2} + n^{(r-1)} l^{(r-1)} + m^{(r-2)}$$

$$n^{(r)} = 2m^{(r-1)} l^{(r-1)} + n^{(r-1)}; \quad z^{(r)} = -\frac{n^{(r)} \pm \sqrt{k}}{2m^{(r)}}$$

$$l^{(r)} < z^{(r)} \left(= \frac{1}{z^{(r-1)} - l^{(r-1)}} \right)$$

194. Preparata questa tavola rifletto che i raziocinj sull'equazioni con radici positive, si applicano a quelle con radici negative, e che però l' equazione proposta può sempre guardarsi dalla parte soltanto delle sue radici positive. Passo quindi ad osservare che l' equazione proposta può avere una sola, o ambedue le radici positive; nel primo caso ciascuna delle trasformate di quella serie che ne abbiamo cavato non può avere che una sola radice > 1, poichè avendo z un sol valore reale positivo, non può

$z' \left(= \frac{1}{z - l} \right)$ che averne anch' essa un solo, il

quale per essere $z - l < 1$, sarà sempre > 1; così avendo z' un sol valore reale positivo, non

ne avrà $z''(=\frac{1}{z'-l'})$ che un solo egualmente >1

e così di seguito: nel secondo caso però per avere la trasformata (b) ambedue le radici >1, bisogna che i valori positivi di z sono tali, quanto sempre si abbia $\frac{1}{z-l}>1$, cioè $z-l<1$. Veggiamo ora quale dee essere il carattere di questi due valori di z onde adempiersi questa condizione.

195. Sieno a, $a+n$ i due valori di z, onde abbiamo per condizione le due ineguaglianze $a-l<1$, $a+n-l<1$, che dovranno avverarsi nel medesimo tempo. La prima sempre vera per posizione ci dà $a-l=1-i$, in cui $i<1$, e però cene trasforma in $1-i+n<1$, cioè in $n<i$ la seconda. Quindi risulta dalla proposta condizione che allora essa verrà soddisfatta, cioè allora la (b) avrà ambedue le sue radici >1, quando la differenza fra quelle della proposta (a) sono $<i$, (se non m'inganno mi sembra che non può dirsi $a<1$, come dice il Paoli; poichè dall'essere $n<i$, ed $i<1$, è ver che s'inferisce $n<1$, ma nel tempo stesso non si esclude il caso in cui n può trovarsi tra i ed 1); e non ne avrà perciò che una sola >1, quando tal differenza è $>i$. Nel caso adun-

razionale $\sqrt{(k+lz^2)}$, cioè di risolvere l'equazione $\sqrt{(k+lz^2)}=Q$.

107. La soluzione generale di questa equazione non è dovuta che al de Lagrange. Noi ci contentiamo per ora di appoggiarla a qualche opportuna osservazione sull'equazione proposta, riservandoci di esporne ne' problemi qui appresso, in cui avremo occasione, la dottrina che quel sommo geometra ci ha esposta nelle memorie dell' Accademia di Berlino per gli anni 1767. 1768. e nel secondo volume degli elementi di algebra dell' Eulero.

108. Osservo adunque che il primo termine della quantità $\sqrt{(\frac{1}{4}+kx-x^2)}$ da rendersi razionale, è un quadrato perfetto, e perciò ho $m^2+px+qx^2=Q$; equazione che divisa per x^2 diviene $\frac{m^2}{x^2}+\frac{p}{x}=Q-q$, in cui compito a quadrato il primo membro (l. 42), ci dà

$$x = \frac{2m^2}{\pm 2m\sqrt{\left(Q + \frac{p^2}{4m^2} - q\right)} - p} = (1.418) \ldots$$

$$\frac{2m^2 Aa}{\pm m\left(A^2 \mp \left(\frac{p^2}{4m^2} - q\right)a^2\right) - pAa};$$

Quindi nel caso della proposta quantità, in cui $m = \frac{1}{2}$, $p = 1$, $q = -1$, e però $\frac{p^2}{4m^2} - q = 2$, sarà $x = \frac{Aa}{\pm(A^2 + 2a^2) - 2Aa}$; ed omettendo il segno inferiore che ci darebbe x negativo, avremo

$$x = \frac{Aa}{(A-a)^2 + a^2}.$$ Quindi

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4} + x - x^2\right)} = \frac{A^2 - 2a^2}{2((A-a)^2 + a^2)}$$

$$-\frac{2x^2 - 1}{2} = \frac{A^4 - 4A^3a + 6A^2a^2 - 8Aa^3 + 4a^4}{2((A-a)^2 + a^2)^2}$$

$$y = \frac{1}{2((A-a)^2+a^2)^2}\left(A^4-4A^3a+6A^2a^2-8Aa^3\right.$$

$$\left.+\,4a^4 \pm (A^2-2a^2)((A-a)^2+a^2)\right)$$

in cui il doppio segno è determinato ne' casi particolari di A, a, dalla condizione che y dee essere positivo.

PROB. 46.

Trovar due rotti razionali la cui somma, e il cui prodotto facciano due interi.

189. Sieno $\frac{x}{y}$, $\frac{u}{t}$ i due rotti razionali cercati onde abbiamo per condizioni

$\frac{x}{y}+\frac{u}{t}=E$, $\frac{xu}{yt}=E'$, ovvero $tx+uy=Ety$, ed $ux=E'ty$. Quindi eliminando x dalla seconda per mezzo della prima, dividendone per y il risultato, e trattandone il quoziente giusta il metodo dell' equazioni quadratiche, ne avremo

$$u=\frac{1}{2}t(E\pm\sqrt{(E^2-4E')}) \text{ e però } \frac{u}{t}= \ldots$$

$$\frac{1}{2}(E\pm\sqrt{(E^2-4E')}),\ \frac{x}{y}=\frac{1}{2}(E\pm\sqrt{(E^2-4E')})$$

espressioni razionali quando si fa $E'=\frac{E^2-E''^2}{4}$

190. Sembra adunque che possono darsi due rotti razionali, onde soddisfare alle condizioni proposte: ma se osserviamo per poco l'espressioni, cui guidato ci hanno tali condizioni, ne vedremo tutta la illusione svanita. In effetto una radice numerica qualunque è pari, o impari, secondo che pari, o impari è il quadrato, cui essa appartene. Quindi essendo $4E'$ sempre pari, sarà $\sqrt{(E^2-4E')}$ pari, o impari, secondo che pari, o impari sarà E. Quindi i due termini dell'espressioni trovate sono o tutti due pari, o tutti due impari, la di cui somma o differenza è sempre un numero pari, e però divisibile per 2. Quindi finalmente l'espressioni, che le condizioni enunciate ci diedero pe' rotti cercati, non sono che assolutamente intere.

Ecco come queste tre conseguenze ci mostrano che le condizioni proposte ci guidano a numeri razionali interi, e non rotti: come il calcolo ha rettificato la nostra falsa posizione: come possiamo quindi conchiuderne l'impossibilità dell'enunciata ricerca.

PROB. 47. 48.

Costruir le serie poste al numero (l. 420)

Dimostrare che i risultati + a, − b, + c, − *cc.* *son periodici*.

191. Il soggetto di questi problemi essendo unico ed indivisibile, fa che io venisse a trattarli insieme e a prevenire che nel progresso del dettaglio, avremo occasione a conoscere il contenuto de' teoremi propostovi.

192. Incomincio dall'avanzare che se in una equazione del secondo grado, le di cui radici non sono commensurabili, si prendono per x de'valori sempreppiù prossimi al vero, sene avrà una serie periodica di equazioni simili alla proposta. Noi l'andiamo a vedere sull'equazione completa

(a)..., $mz^2+nz+h=o$, onde applicarne i risultati

all' incompleta $y^2-Ax^2=\frac{y^2}{x^2}-A=z^2-A=o$

proposta ne' problemi in questione.

193. Se nell' equazione (a) suppongo

$z=l+\frac{1}{z'}$, ne avrò la trasformata

(b) $m'z'^2+n'z'+m=o$, in cui $m'=ml^2+nl+h$, ed $n'=2ml+n$; Se in questa (b) suppongo ancora

$z' = l' + \frac{1}{z''}$ ne avrò la trasformata

(c) $m''z''^2 + n''z'' + m' = 0$ in cui $m'' = m'l'^2 + n'l' + m$, $n'' = 2m'l' + n'$; se pure in questa (c) suppongo $z'' = l'' + \frac{1}{z'''}$, ne avrò una terza trasformata

(d) . . . $m'''z'''^2 + n'''z''' + m'' = 0$, in cui $m''' = m''l''^2 + n''l'' + m'$, ed $n''' = 2m''l'' + n''$, e così di seguito. Quindi da questa serie di equazioni (a), (b), (c), ec. avremo . . .

$$z = -\frac{n \mp \sqrt{(n^2 - 4mh)}}{2m} = -\frac{n \mp \sqrt{k}}{2m}$$

$$z' = -\frac{n' \mp \sqrt{(n'^2 - 4m'm)}}{2m'} = -\frac{n' \mp \sqrt{k'}}{2m'}$$

$$z'' = -\frac{n'' \mp \sqrt{(n''^2 - 4m''m')}}{2m''} = -\frac{n'' \mp \sqrt{k''}}{2m''}$$

$$z''' = -\frac{n''' \mp \sqrt{(n'''^2 - 4m'''m'')}}{2m'''} = -\frac{n''' \mp \sqrt{k'''}}{2m'''}.$$

ec.

Due offervazioni ci faranno render più femplici quefti valori. In fatti offervo I. che mettendo i valori di m', n'; m'', n''; m''', n'''; ec. ne' corrifpondenti di k', k'', k''', ec. ne avremo $k' = k'' = k''' =$

$n^2 - 4m.h = k$: Offervo II. che $z = l + \frac{1}{z'} = l - \ldots$

$$\frac{2m'}{n' \mp \sqrt{k'}} = l - \frac{2m'(n' \pm \sqrt{k'})}{n'^2 - k'} = \text{(mettendo} \ldots$$

$n'^2 - 4n.m'$ per k' e per l il fuo valore . . .

$\frac{n' - n}{2m}) - \frac{n \pm \sqrt{k'}}{2m}$. Quindi conchiudo che la quantità k fotto il radicale è per tutti l'ifteffa, e che quefto radicale ha fegni alternativi. Quindi raccolgo tutte le formule già ftabilite in una tavola, per cui prevengo che il fegno $<$ vi efprime il numero intero proffimamente inferiore alla quantità cui precede e che $k = n^2 - 4mh$

(a)

$$m\,; \quad n\,; \quad z = -\frac{n+\sqrt{k}}{2m}\,; \qquad l < z$$

(b)

$$m' = ml^2 + nl + h\,;\; n' = 2ml + n\,;\; z' = -\frac{n' - \sqrt{k}}{2m'}$$

$$l' < z'\left(= \frac{1}{z-l}\right)$$

(c)

$$m'' = m'l'^2 + n'l' + m\,;\; n'' = 2m'l' + n'\,;\; z'' = -\frac{n'' + \sqrt{k}}{2m''}\,;$$

$$l'' < z''\left(= \frac{1}{z' - l'}\right)$$

(d)

$$m''' = m''l''^2 + n''l'' + m'\,;\; n''' = 2m''l'' + n''\,;$$

$$z''' = -\frac{n''' - \sqrt{k}}{2m'''}\,;\; l''' < z'''\left(= \frac{1}{z'' - l''}\right)$$

. . . .

(f)

$$m^{(r)} = m^{(r-1)} l^{(r-1)2} + n^{(r-1)} l^{(r-1)} + m^{(r-2)}$$

$$n^{(r)} = 2m^{(r-1)} l^{(r-1)} + n^{(r-1)} ; \quad z^{(r)} = -\frac{n^{(r)} \pm \sqrt{k}}{2m^{(r)}}$$

$$l^{(r)} < z^{(r)} \left(= \frac{1}{z^{(r-1)} - l^{(r-1)}} \right)$$

194. Preparata questa tavola rifletto che i raziocinj sull'equazioni con radici positive, si applicano a quelle con radici negative, e che però l' equazione proposta può sempre guardarsi dalla parte soltanto delle sue radici positive. Passo quindi ad osservare che l' equazione proposta può avere una sola, o ambedue le radici positive; nel primo caso ciascuna delle trasformate di quella serie che ne abbiamo cavato non può avere che una sola radice > 1, poichè avendo z un sol valore reale positivo, non può $z' \left(= \frac{1}{z - l} \right)$ che averne anch' essa un solo, il quale per essere $z - l < 1$, sarà sempre > 1; così avendo z' un sol valore reale positivo, non

ne avrà $z''(=\frac{1}{z'-l'})$ che un solo egualmente > 1 e così di seguito: nel secondo caso però per avere la trasformata (*b*) ambedue le radici > 1, bisogna che i valori positivi di z sono tali, quanto sempre si abbia $\frac{1}{z-l} > 1$, cioè $z-l < 1$. Veggiamo ora quale dee essere il carattere di questi due valori di z onde adempiersi questa condizione.

195. Sieno a, $a+n$ i due valori di z, onde abbiamo per condizione le due ineguaglianze $a-l<1$, $a+n-l<1$, che dovranno avverarsi nel medesimo tempo. La prima sempre vera per posizione ci dà $a-l=1-i$, in cui $i<1$, e però cene trasforma in $1-i+n<1$, cioè in $n<i$ la seconda. Quindi risulta dalla proposta condizione che allora essa verrà soddisfatta, cioè allora la (*b*) avrà ambedue le sue radici >1, quando la differenza fra quelle della proposta (*a*) sono $<i$, (se non m'inganno mi sembra che non può dirsi $a<1$, come dice il Paoli; poichè dall'essere $n<i$, ed $i<1$, è ver che s'inferisce $n<1$, ma nel tempo stesso non si esclude il caso in cui n può trovarsi tra i ed 1); e non ne avrà perciò che una sola >1, quando tal differenza è $>i$. Nel caso adun-

que in cui i valori positivi di z differiscono fra loro di una quantità $< i$, le trasformate possono avere ambedue le radici > 1. In questo caso però si osservi che tali valori di z sono $\frac{1}{a-l}$, $\frac{1}{a+n-l}$: valori che differiscono di $\frac{n}{(a-l)(a+n-l)}$ differenza che avendo ambi i fattori del denominatore < 1 è sempre $> n$, e però che ci mostra essere la differenza fra le due radici della (b) maggiore di quella fra le radici della (a); così si viene a provare egualmente che la differenza fra le radici della (c) è maggiore di quella fra le radici della (b), e così di seguito. Quindi quanto picciolo sia un tale aumento si arriverà sempre ad una trasformata, in cui tal differenza sarà $>$ del corrispondente i, e però ad una che avrà una sola radice > 1.

196. Passiamo ad un'altra osservazione, che unitamente alle due già praticate ci guiderà al compimento di questa teoria. Ogni equazione le di cui radici sono a, b, c, ec. può esprimersi con $(x-a)(x-b)(x-c) \ldots = 0$, quindi facendo $x = E = F$, noi l'avremo trasformata nelle due

$$(E-a)(E-b)(E-c)\ldots=0$$

$$(F-a)(F-b)(F-c)\ldots=0$$

Se supponiamo che le quantità E,F sono i limiti superiore ed inferiore di un certo numero delle radici $a,b,c,$ ec. allora se questo numero è impari le due trasformate avranno segni contrarj, e ne avranno lo stesso, se ne è pari: conclusione evidente per essere impari nel primo, e pari nel secondo caso il numero con segno negativo de' fattori componenti la trasformata del limite inferiore.

197. Dopo tali osservazioni se noi esprimiamo con $m^{(i)}z^{(i)2}+n^{(i)}z^{(i)}+m^{(i-1)}=0$ la prima tra la serie dell' equazioni che ha una sola radice >1: se notiamo con f il limite superiore di questa radice, e con $l^{(i)}$ l' intero ad essa prossimamente inferiore: se supponiamo infine $z^{(i)}=f=l^{(i)}$ ne avremo le due quantità

$$m^{(i)}f^2+n^{(i)}f+m^{(i-1)}$$

$$m^{(i)}l^{(i)2}+n^{(i)}l^{(i)}+m^{(i-1)}$$

le quali avranno (96) segno contrario: ma siccome la quantità $f^2+\frac{n^{(i)}}{m^{(i)}}f+\frac{m^{(i-1)}}{m^{(i)}}$ è (96) sempre po-

sitiva, e perciò la $m^{(i)} f^2 + n^{(i)} f + m^{(i-1)}$ ha il medesimo segno di $m^{(i)}$: siccome dall' equazione $m^{(i)} z^{(i)2} + n^{(i)} z^{(i)} + m^{(i-1)} = 0$, facendo $z^{(i)} = l^{(i)} + \frac{1}{z^{(i+1)}}$, se ne ottiene

$$m^{(i+1)} z^{(i+1)2} + n^{(i+1)} z^{(i+1)} + m^{(i)} = 0,$$

in cui $m^{(i+1)} = m^{(i)} l^{(i)2} + n^{(i)} l^{(i)} + m^{(i-1)}$:

così resta dimostrato che $m^{(i)}$ ed $m^{(i+1)}$ hanno sempre de' segni contrarj. Portando nel modo stesso i raziocinj sulla serie dell' equazioni da quella in poi che la prima ha una sola radice > 1, si troverà che

$m^{(i+1)}$, ed $m^{(i+2)}$; $m^{(i+2)}$, ed $m^{(i+3)}$; ec.

avranno sempre segni contrarj.

198. Dimostrata l'alternazione che i termini della prima linea verticale della nostra tavola hanno fra i loro segni dalla trasformata in poi che ha una sola radice > 1 riesce assai facile di ricavarne un periodo sul loro ritorno. Infatti l'essere tutti i prodotti

$m^{(i)} m^{(i+1)}$; $m^{(i+1)} m^{(i+2)}$; $m^{(i+2)} m^{(i+3)}$; ec.

ſempre negativi, ne avviene che l' eſpreſſione generale $k = n^{''..i+v2} - 4m^{''..i+v-1} m^{''..i+v}$ de' termini dell'ante penultima linea verticale pren. de la forma $k = n^{''..i+v2} + 4m^{''..i+v-1} m^{''..i+v}$ donde ſene ottengono le due

$$n^{''..i+v2} = k - 4m^{''..i+v-1} m^{''..i+v}$$

$$4m^{''..i+v-1} m^{''..i+v} = k - n^{''..i+v2}$$

Nella prima di eſſe io vi leggo l' argomento che $n^{''..i+v} < \sqrt{k}$, e nella ſeconda, in cui $m^{(i+v-1)}$, $m^{(i+v)}$ ſono de' numeri interi, quello di eſſere $m^{(i+v)} < k$. Quindi eſſendo k un numero finito, ne deriva che i valori, di $m^{(i)}$, $m^{(i+1)}$ ec. di $n^{(i)}$, $n^{(i+1)}$ ec. rappreſentati generalmente da $m^{(i+v)}$, ed $n^{(i+v)}$ dovranno indiſpenſabilmente ritornare ſe anderanno a continuarſi ſempreppiù. L' equazioni adunque ritorneranno dopo un certo periodo v; ritorneranno ancora i $i^{(r)}$, e le ſucceſſive poſizioni di

$z = l + \frac{1}{z'}, z' = l' + \frac{1}{z''}, z'' = l'' + \frac{1}{z'''}$, ec.

dandoci $z = l + \cfrac{1}{l' + \cfrac{1}{l'' + \cfrac{\vdots}{\cfrac{1}{l^{(r)}}}}}$

ci mostrano che la soluzione dell' equazioni quadratiche con radici reali incommensurabili conduce ad una frazione continua periodica.

199. Ecco dimostrato adunque quanto sul principio avanzammo. Non ci resta che farne l' applicazione. Facciamo però prima riflettere che fatto nelle (a), (b), (c), ec. $z = l$, $z' = l'$, $z'' = l''$, ec. avremo i valori di m', m'', m''', ec. ma siccome la trasformata (b) corrispondente a $z' (= l')$, non è che la (a) corrispondente a $z \left(= l + \frac{1}{z'}\right) = l + \frac{1}{l'} = (50) \frac{M}{N}$; siccome la ($c$) corrispondente a $z'' = l''$; non che la (b) corrispondente a $z' \left(= l' + \frac{1}{z''} = l' + \frac{1}{l''}\right)$ e però la

(a) corrispondente z

$$z\left(=l+\frac{1}{z'}\right)=l+\cfrac{1}{l'+\cfrac{1}{l''}}=(50)\ \frac{M'}{N'},$$

e così di seguito. Quindi m', m'', m''', ec. esprimono i valori dello stato successivo che prende $mz^2+nz+h=0$ facendovi successivamente

$$z=\frac{M}{N}=\frac{M'}{N'}=\ldots\frac{M^{(n)}}{N^{(n)}}$$ cioè esprimono i valori delle quantità

$mM^2+nMN+hN^2, mM'^2+nM'N+hN'^2$, ec. Questa osservazione, che ci sarà utile in appresso è quella che chiude il dettaglio generale propostoci. Quindi passiamo all' applicazione, che forma il soggetto del problema enunciato.

200. Le serie di cui in questo problema sen propone la costruzione non sono che quelle delle tavola (193) applicate al caso della equaziona $z^2-A=0$. Quindi se facciamo quest' applicazione non solo avremo soddisfatto alla prima parte di esso, ma bensì alla seconda, in quanto ci dà nella prima linea verticale i valori periodici di questa equazione.

201. Paragonò adunque l'equazione generale $mz^2+nz+h=0$, colla data particolare $z^2-A=0$, onde avrò $m=1$, $n=0$, $h=-A$: quindi fatte le opportune sostituzioni nella tavola della pagina citata, avrò la particolare pel caso nostro in cui $k=4A$

$$z^2-A=0;\ n=0;\ m=1;\ z=\sqrt{A};\ l<\sqrt{A}$$

$$m'z'^2+n'z'+1=0;\ n'=2l;\ m'=l^2-A$$

$$z'=-\frac{\frac{1}{2}n'-\sqrt{A}}{m'};\ l'<\frac{\frac{1}{2}n'-\sqrt{A}}{m'}$$

$$m''z''^2+n''z''+m'=0;\ n''=2m'l'+n';\ m''=m+l'(n'+m'l')$$

$$z''=-\frac{\frac{1}{2}n''+\sqrt{A}}{m''};\ l''<\frac{\frac{1}{2}n''+\sqrt{A}}{m''}$$

$$m'''z'''^2+n'''z'''+m''=\ ;\ n'''=2m''l''+n'';$$

$$m'''=m'+l''(n''+m''l'');\ z'''=-\frac{\frac{1}{2}n'''-\sqrt{A}}{m'''}$$

$$l'''<\frac{\frac{1}{2}n'''-\sqrt{A}}{m'''}$$

$$m^{(r)}z^{(r)2}+n^{(r)}z^{(r)}+m^{(r-1)}=0;$$

$$n^{(r)}=2m^{(r-1)}l^{(r-1)}+n^{(r-1)};$$

$$m^{(r)}=m^{(r-2)}+l^{(r-1)}(n^{(r-1)}+m^{(r-1)}l^{(r-1)})$$

$$z^{(r)}=-\frac{\frac{1}{2}n^{(r)}\pm\sqrt{A}}{m^{(r)}};\ l^{(r)}<\frac{\frac{1}{2}n^{(r)}\pm\sqrt{A}}{m^{(r)}}$$

nella quale date le qui appresso denominazioni.

$A=-\frac{1}{2}n$ $\quad a=m$ $\quad p=l$

$B=+\frac{1}{2}n'$ $\quad b=-m'$ $\quad q=l'$

$C=-\frac{1}{2}n''$ $\quad c=m''$ $\quad r=l''$

$D=+\frac{1}{2}n'''$ $\quad d=-m'''$ $\quad s=l'''$

. . . .

$T=\mp\frac{1}{2}n^{(r)}$ $\quad t=\pm m^{(r)}$ $\quad u=l^{(r)}$

$V=\pm\frac{1}{2}n^{(r+1)}$ $\quad v=\mp m^{(r+1)}$ $\quad u'=l^{(r+1)}$

$X=\mp\frac{1}{2}n^{(r+2)}$ $\quad x=\pm m^{(r+2)}$ $\quad u''=l^{(r+2)}$

ſi verrà a mettere ſotto la ſeguente forma in cui $k = 4d$

$A' = 0$	$a = 1$	$az^2 - 2Az - A = 0$
$B = p$	$b = A - p^2$	$bz'^2 - 2Bz' - 1 = 0$
$C = bq - B$	$c = a + q(B - C)$	$cz''^2 - 2Cz'' - b = 0$
$D = cr - C$	$d = b + r(C - D)$	$dz'''^2 - 2Dz''' - c = 0$

. . . .

$$X = u'v - U;\quad x = t + u'(U - X);\quad xz^{(r+2)2} - 2Xz^{(r+2)} - t = 0$$

$$z = \sqrt{A} \qquad p < \sqrt{A}$$

$$z' = \frac{p - \sqrt{A}}{b} \qquad q < \frac{p - \sqrt{A}}{b}$$

$$z'' = \frac{C - \sqrt{A}}{c} \qquad r < \frac{C - \sqrt{A}}{c}$$

$$z''' = \frac{D - \sqrt{A}}{d} \qquad s < \frac{D - \sqrt{A}}{d}$$

. . . .

$$z^{(r+2)} = \frac{X - \sqrt{A}}{x} \qquad u'' < \frac{X - \sqrt{A}}{x}$$

Questa tavola differisce da quella del numero enunciato (l.420) nella sola ultima linea verticale e contiene di più le tre linee intermedie. Supponendo però (quantunque contro ogni ragione) quello stesso $B(=p)=-\sqrt{A}$, noi ne avremo l'ultima linea della nostra tavola trasformata in quella dell'autore. Ecco come con una falsa supposizione abbiamo reso in tutto identiche le serie contenute nelle due tavole in questione. Non trascuro intanto di avvertire che le linee delle $M^{(n)}, N^{(n)}$ inserite dall'autore delle lezioni nella sua, e mancanti nella nostra tavola si sono già date (50); e di fare riflettere che i termini della seconda linea sono con segni alternativi, e periodici. Abbiamo già soddisfatto nella maniera la più generale alle condizioni di questo problema. Passiamo ormai al dettaglio in cui c' impegna il seguente

PROB. 49.

Risolvere in rotti, o in intieri l' equazione

$13x^2-159=Q$.

202. L' equazione proposta nelle condizioni enunciate non è che della forma $k+Ax^2=Q$.

Questa equazione non essendo in alcuno de' casi (l.423...433) può risolversi col metodo generale che cennammo (187). Il nostro autore delle lezioni non fa sopra queste metodo (l.434...438) che toccarne solamente le diverse parti, senza mai dimostrarle, e ne parla così in ristretto e in confuso che difficilmente sen può formare una idea chiara e precisa. Quindi io mi propongo, onde pienamente soddisfare a questo problema, un ragionato dettaglio sulla soluzione I. in numeri razionali, e II. in numeri razionali interi, dell' equazione generale (A)..$k + Ax^2 = Q$, per poi applicarne i risultati alla particolare in esso proposta. Dunque.

203. I. Incomincio a riflettere che nell' equazione proposta $k + Ax^2 = Q$ possono k, A incontrarsi in alcuno de' casi (l.423..433) che sopra citammo; casi che comprendono le soluzioni particolari di essa, e perchè esaminati dall' autore delle lezioni non ne facciamo parola. Passo adunque al metodo del Lagrange onde soddisfare con esso a tutti i casi possibili in cui possono esse incontrarsi: ed osservo a tale oggetto che queste quantità k, A possono singolarmente o simultaneamente contenere un fattor quadrato. Quando

ciò si incontra l'equazione proposta è suscettibile allora di essere semplicizzata. Infatti sieno a^2, c^2 questi fattori, de' quali l'uno si farà $=1$ quando non ha luogo che un solo; ed avremo $\frac{k}{a^2}=K$, $\frac{A}{c^2}=l$, e però l'equazione $k+Ax^2=Q$ si trasforma nella $a^2K+c^2lx^2=Q$, in cui fatto $x=\frac{ax_1}{c}$, ne risulta $K+lx_1^2=\frac{Q}{a^2}=Q$: equazione della forma medesima della proposta, ma più semplice però nella soluzione, perchè K, l sono sempre più piccioli di K, A: equazione che dandoci il valor di x_1 ci dà ancora quello di x mercè la $x=\frac{ax_1}{c}$: equazione perfine nella cui soluzione si contiene quella della proposta. Risolviamo adunque la equazione $(A)\ldots K+lx_1^2=Q$ sotto la condizione che K, l sieno senza fattor quadrati.

204 Osservo a tale oggetto che x_1 può per condizione essere intera o fratta, e perciò per esprimere in generale il suo valore uop' è esprimerlo con $x_1=\frac{p}{q}$, in cui p, q sono de' numeri

interi e primi tra loro. Questa espressione generale di x_1 ci trasforma la (A) nella

$$(a) Kq^2 + lp^2 = Qq^2 = Q1 .$$

La soluzione adunque in numeri razionali della (A) ci porta a quella della (a), di cui per rilevarne il carattere rifletto che essendo K, l intieri e dovendo p, q esserlo per ipotesi, è chiaro che dovrà esservelo ancora il quadrato $Q1$, e perciò che questa equazione dee risolversi in numeri interi, è chiaro cioè che la soluzione in numeri razionali della (A) ci guida a quella in numeri intieri della (a): rifletto inoltre che tanto K, p quanto l, q son sempre primi tra loro, poichè se avessero un fattor comune b, e d, cioè se fosse $K = K'b$, $p = k'b$, ed $l = K''d$, $q = k''d$ (in cui K', k', e K'', k'' son de' numeri interi; in cui K' o K'' non può contenere un altro fattore $= b$ o $= d$, per essere K, l senza fattor quadrati; in cui perfine b, d non possono essere eguali, perchè p, q sono per ipotesi primi tra loro), noi avremo $Kq^2 + lp^2 = (K'k''^2 d + K''k'^2 b) bd = Q1$, e perciò $K'k''^2 d + K''k'^2 b = \frac{Q1}{bd}$: equazione in cui il secondo membro non può essere un quadrato;

205. Fissate con queste riflessioni le proprietà dell'equazione (a), io passo a prendere il valor di $p^2 = \frac{Q\iota - Kq^2}{l}$, che per renderlo intero suppongo (184) $Q\iota = (nq - lq_1)^2$ e ne avrò $p^2 = \frac{n^2 - K}{l} q^2 - q_1 (2nq - lq_1)$. Per iscoprire se questo valor di p^2 può risultare un numero intero, noi ne abbiamo (185) la pronta maniera tutte le volte che $K < l$; e ciò perchè ad altro non si riduce se non di dover essere ancora intera la quantità $\frac{n^2 - K}{l}$. Se però non sarà $K <$ ma sarà $> l$ allora invece di prendere dalla (a) il valor di p^2 bisognerà prenderne quello di q^2, acciò facendo $Q\iota = (np - Kp_1)^2$ se ne avesse $q^2 = \frac{n^2 - l}{K} p^2 - p_1 (2np - Kp_1)$ in cui pel num. stesso sappiamo conoscere se $\frac{n^2 - l}{K}$, e però q può essere un numero

intero. L'essere adunque $l >$, o $< K$ è una circostanza, cui dobbiamo avvertire nella soluzione della (a), onde averne in generale un argomento se essa può o nò risolversi in numeri interi. Quando $l > K$ noi dobbiamo cercare il valore di p per mezzo di q, e quello di q per mezzo di p quando ne è minore. Se riflettiamo però che p, q sono delle lettere prese a capriccio onde indicare i due termini del valore di x_1, resteremo sul campo persuasi che se nel caso in cui $K > l$ noi faremo nella trasformazione della (A)

$x_1 = \frac{q}{p}$ in vece di $x_1 = \frac{p}{q}$, cioè se mutiamo p

in q e q in p, in niente si altera lo stato della questione, e si avrà frattanto nella (a) p^2 col massimo coefficiente come nel caso in cui $K < l$. Quindi senza cercare p per q quando $l > K$, e q per p quando ne è minore, basta prendere nel primo caso $x_1 = \frac{p}{q}$, ed $x_1 = \frac{q}{p}$ nel secondo, per averne sempre nella (a) il coefficiente di $p^2 >$ di quello di q^2. Con questa specie di preparazione il secondo caso, in cui può incontrarsi l'equazione (a), si riduce sempre al primo, e

perciò possiamo noi dispensarci di considerare due casi nella soluzione generale di essa. Quindi intenderemo sempre indicare con l la più grande delle due quantità K, l: indicazione che quando ne' casi particolari si trova il contrario viene a rettificarsi colla già notata reciproca mutazione di p in q.

206. Essendo adunque $l > K$ sappiamo che se

$\frac{n^2 - K}{l}$ non è uguale ad alcuno degl'interi

$< \pm(\frac{1}{4} l + 1)$ non può sperarsi per p un valore in numero intero, qualunque ne sieno quelli di q, q_1, ed abbiamo perciò un argomento negativo sulla soluzione della proposta equazione. Nel caso generale in cui siamo, supponendo possibile questa soluzione per esporre il metodo in tutta la sua totalità, notiamo con l' uno degl' interi $< \pm(\frac{1}{4} l + 1) = \frac{n^2 - K}{l}$ ed avremo

$p^2 = l' q^2 - 2nqq_1 + l q_1^2$. Or veggo che l' può essere o nò un numero quadrato: se è un quadrato, noi saremo allora arrivati al termine del-

la soluzione, poichè facendo $q=1, q_1=0$ avremo $p=\sqrt{l'}$ e però in $x_1=\sqrt{l'}$, o $=\frac{1}{\sqrt{l'}}$ secondo che $K <$, o $> l$, una delle soluzioni di cui l' equazione proposta è capace, e da cui potremo cavarne tutte le altre come vedremo a suo luogo. Se non è un quadrato, allora moltiplicando il valor di p^2 per l' ne avremo

$l'p^2 = l'^2q^2 - 2nl'qq_1 + ll'q_1^2 = l'^2q^2 - 2nl'qq_1 +$ $(n^2-K)q_1^2 = (nq_1 - l'q)^2 - Kq_1^2$, in cui fatto $\frac{p}{q_1} = x_2$ se ne avrà la $(A1)$.. $K + l'x_2^2 = \frac{1}{q_1^2}(nq_1 - l'q)^2 = Q^2$:

equazione simile alla proposta, nella quale levato se si vuole da l' il fattor quadrato che esso può contenere si riduce al caso medesimo della (A), e perciò risolubile col metodo stesso:

equazione in cui per essere $l' < (\frac{1}{4}l+1) < l$, e

per poter risultare perciò $l' <$, o $> K$, si contengono ancora i due casi sopra notati: equazione finalmente su di cui ripetuto il metodo stesso ci dee portare o alla soluzione o all' argomento che cene provi l' impossibilità o ad un' altra

$(A2) \ldots K + l''x_3^2 = Q''$ egualmente simile alla proposta, e che levato se si vuole da l'' il fattor quadrato, se ne contiene, si riduce alla (A) e si risolve col metodo stesso. Così continuando a semprepiù ripetere il medesimo metodo, e non incontrando nel corso della ripetizione il notato argomento d' insolubilità o la soluzione, dovremo di mano in mano arrivare all'equazioni

$(A3) \ldots K + l'''x_4^2 = Q'''$, $(A4) \ldots K + l''''x_5^2 = Q''''$, ... $(Am)\ K + l^{(m)}x_{m+1}^2 = Q^{(m)}$: Si noti però che il progresso degl' $l, l', l'', \ldots l^{(m)}$ formando una serie convergente di numeri intieri, e perciò il numero di essi non potendo che essere limitato e finito, ne avviene che ripetendo di continuo il metodo già esposto sull' equazioni (Am), cui esso di

continuo ci riduce dobbiamo indispensabilmente arrivare in una di queste ripetizioni o al notato argomento d'insolubilità, o a trovare per $l^{m)}$ un numero quadrato, cioè la soluzione propostaci. Ma esponiamo in un quadro generale il corso di questa ripetizione, onde vederne in generale il progresso e la relazione che lega l'un coll'altra.

207. Io per camminare con ordine suppongo in questo quadro che l', l'' fino a $l^{(r)}$ risultano sempre $> K$, e che perciò fino alla (r) ripetizione io intendo con $l^{(r)}$ notare il maggiore de numeri $l^{(r)}$, K: suppongo poi che $l^{(r+1)}$ risulti $< K$, e che perciò questa notazione che è quella adottata (205) non ha più luogo. Quindi fino alla ripetizione (r) io prenderò $x_r = \frac{p_r}{q_r}$ per aver dalla (Ar) l'equazione (ar) nelle condizioni del metodo, e prenderò $x_{r+1} = \frac{q_{r+1}}{p_{r+1}}$ per averla nella ripetizione $(r+1)$. Dopo questo avvertimento io vengo alla tavola qui appresso inserita, incominciando il quadro in essa tracciato dall'

$q' - l'q)^2$; da cui fatto $\frac{p}{q'} = x_1$

$^2 + Kq'^2_1 = (n_1 q'_1 - l'' q_1)^2$; da

$_{+1} - Kq'_{r+1})^2$, $K' = \frac{n^2_{r+1} - l^{(r+1)}}{K}$ e riduce

$K' x^2_{r+2} = \left(\frac{n_{r+1} q'_{r+1} - K' q_{r+1}}{q'_{r+1}}\right)^2 = Q^{(r+2)}$

208 Osservando quindi in questo quadro le tre ripetizioni contigue $(r-1)$, (r), $(r+1)$, generalmente eseguite, veggo che dalle $(r-1)$, (r), si ha l' equazione

$$\frac{q_r}{q'_{r-1}}(n_{r-1}q'_{r-1}-l^{(r)}q_{r-1})=n_rq_r-l^{(r)}q'_r,$$

e che dalle (r), $(r+1)$, sene ha la

$$\frac{p_{r+1}}{q'_r}(n_rq'_r-l^{(r+1)}q_r)=n_{r+1}q_{r+1}-K'q'_{r+1}$$

equazioni che ci danno

$$q_{r-1}=\frac{q'_{r-1}}{q_r}\left(\frac{n_{r-1}-n_r}{l^{(r)}}q_r+q'_r\right)$$

$$q_r=\frac{q'_r}{l^{(r+1)}p_{r+1}}\left(n_rp_{r+1}-n_{r+1}q_{r+1}+Kq'_{r+1}\right)$$

dalle quali riflettendo che

$$x_r=\frac{p_{r-1}}{q'_{r-1}}=\frac{p_r}{q_r},\ x_{r+1}=\frac{p_r}{q'_r}=\frac{q_{r+1}}{p_{r+1}},$$

sene hanno le più semplici

$$q_{r-1} = \frac{n_{r-1} - n_r}{l^{(r)}} q_r + q'_r$$

$$q_r = \frac{1}{l^{(r+1)}} \left(n_r p_{r+1} - n_{r+1} q_{r+1} + K q'_{r+1} \right)$$

Di queste due formule generali de' valori de' q_r la prima ha luogo quando il corrispondente $l^{(r)}$ in una qualunque ripetizione $(r-1)$ risulta $>$, e la seconda quando risulta $<$ del corrispondente K. Queste due formule ci danno la maniera onde risalire dall'ultima ripetizione, cioè da quella in cui si trova la soluzione, al valore cercato di x. Infatti se in una qualunque ripetizione $(r+1)$ si trova per K' un numero quadrato $= o^2$, allora facendo $q'_{r+1} = o$, $q_{r+1} = 1$ nella corrispondente $K' p^2_{r+1} + l^{(r+1)} q'_{r+1} = (n_{r+1} q'_{r+1} - K' q_{r+1})$ si avrà $p_{r+1} = o$, e però per essersi supposto in questa ripetizione

$l^{(r+1)} < K$, cioè per aver luogo la seconda delle due formule generali, si avrà

$q_r = \frac{V}{l^{(r+1)}} (n_r^{\,o} - n_{r+1})$: Quindi con questo

valor di q_r e con quello di p_{r+1} $(= q'_r) = o$ se ne avrà, facendo uso della prima di esse, perchè si è supposto $l^{(r)} > K$, quello di q_{r-1}: e così continuando si avranno di mano in mano i valori di q_{r-2}, q_{r-3} ... q facendo sempre uso della prima o della seconda delle due formule secondo che i corrispondenti $l^{(r-1)}$, $l^{(r-2)}$, ... l' risulteranno $>$, o $<$ del corrispondente K. Conoscendo così i valori di p, q ne conosceremo ancora il cercato di x.

209. Vediamo il tutto più da vicino nell' equazione particolare della proposta enunciazione: e vediamolo in un piano ragionato onde sempre unire la brevità alla chiarezza.

Equ. prop. $13x^2 - 159 = Q$; $k = -159$, $A = 13$ senza fattor quadrati; quindi

$$x = \frac{q}{p},\ l = -159, K = 13,\ l' < \pm (\frac{1}{4} l + 1) < 40:$$

Gl' interi positivi < 40 non possono, messi per l', soddisfare all' equ. $l' = \frac{n^2 - 13}{-159}$, cioè alla $13 - 159\, l' = n^2$: i negativi che la risolvono sono $l' = 9$, $= -29$, e i corrispondenti di $n = 38$, $= 68$; l' non un quadrato ci riduce alle.. .

$$(b) \ldots \left| \begin{array}{l} 13q'^2 - 9p^2 = (38q' + 9q)^2 \\ q'^2 - 29p^2 = (68q' + 29q)^2 \end{array} \right.$$

da cui fatto $\frac{p}{q'} = x_1$ se ne hanno le

$$13 - 9x_1^2 = \left(\frac{38q' + 9p^2}{q'}\right)^2 = Q$$

$$13 - 29x_1^2 = \left(\frac{68q' + 29p^2}{q'}\right)^2 = Q'$$

Ripetendo il metodo sopra queste due equazioni sene avranno de' valori per x che egualmente risolvono la proposta. Ma io ne tralascio la prima, perchè a primo colpo mi dà $x = 4$, e mi occupo a ripeterlo sulla seconda, perchè più in esteso ci mostrà il progresso della ripetizione.

(1) *ripetiz. sull' equazione*

$13-29x_1^2 = Q'$; $x_1 = \frac{p_1}{q_1}$ dà la $13q_1^2 - 25p_1^2 = Q'q_1^2$

$= (n_1 q_1 + 25q'_1)^2$; $l = \frac{10^2-13}{-29} = -3 < K$, e riduce alla ($b'$) $13q'^2_1 - 3p_1^2 = (10q'_1 + 3q_1)^2$ da cui

fatto $\frac{p_1}{q'_1} = x_2$ se ne ha $13-3x_2^2 = \left(\frac{10q'_1 + 3q_1}{q'_1}\right)^2 = Q'$

(2) *ripet. sull' equazione.*]

$13-3x_2^2 = Q''$; $x_2 = \frac{q'_2}{p_2}$ dà la $13p_2^2 - 3q_2^2 = Q''p_2^2 =$

$(n_2 q_2 - 13q'_2)^2$, $l''' = \frac{6^2+3}{13} = 3, 0 = \frac{7^2+3}{13} = 4$,

e servendomi del primo valore, onde estendere per un'altra volta la ripetizione del metodo, riduce alla (b'') $3p_2^2 - 3q'^2_2 = (6q'_2 - 3q_2)^2$: da cui fatto

$\frac{p_2}{q'_2} = x_3$ se ne ha $3x_3^2 - 3 = \left(\frac{6q'_2 - 3q_2}{q'_2}\right)^2 = Q'''$

(3) *ripet. sull' quazione.*

$3x_3^2 - 3 = Q'''$; $x = \frac{p_3}{q_3}$ dà la $3p_3^2 - 3q_3^2 = Q'' q_3^2 =$

$(n_3 q_3 - 3q'_3)^2$; $l''' < \pm(\frac{1}{4} l'' + 1) = \pm 1$, $n_3 = 0$

e riduce alla (b''') $p_3^2 - 3q'^2_3 = q_3^2$, dà cui per esser l''' un quadrato facendo $q'_3 = 0$, $q_3 = 1$ se ne ha $p_3 = 1$.

Quindi $x_3 = \frac{p_3}{q_3} = 1 = \frac{p_2}{q'_2}$; cioè $p_2 = 1 = q'_2$; e però dalla (b'') $q_2 = 2$: quindi

$x_2 = \frac{q_2}{p_2} = 2 = \frac{p_1}{q'_1}$, cioè $p_1 = 2$, $q'_1 = 1$, e però dalla (b') $q_1 = -3$: quindi $x_1 = \frac{p_1}{q_1} = -\frac{2}{3} = \frac{p}{q'}$, cioè $p =$ -2, $q' = 3$ e dalla (b) $q = 7$; quindi $x = \frac{q}{p} = -\frac{7}{2}$.

210. Volendo usare però le formule (208) del quadro generale della ripetizione, si rifletta che nella (2) l' $l'' =$ al corrispondente K, e però può adoprarsi qualunqne di esse; che nella (1) l' $l'' <$ del corrispondente K, e però vi ha luogo la seconda; che perfine nell' applicazione l' $l' >$ del corrispondente K, e però vi appartiene la prima. Quindi essendo $x_3 = \pm 1 = \frac{p_2}{q'_2}$, cioè $p_2 = 1$, $q'_2 = \pm 1$, e $q'_3 = 0, q_3 = 1, n_3 = 0, n_2 = \pm 6, l''' = 3$. sarà $q_2 = \frac{n_3 - n_2}{l'''} q_3 + q'_3 = \pm 2$: quindi essendo

$x_2 = \frac{q_2}{q'_2} = \pm 2 = \frac{p_1}{q'_1}$ cioè $p_1 = 2, q'_1 = \pm 1, n = \pm 10$,

$l'' = -3$ è $q_1 = \frac{1}{l''}\left(n_1 p_2 - n_2 q_2 + K q'_2\right) = -3$: ed

essendo $x = \frac{p_1}{q_1} = -\frac{2}{3} = \frac{p}{q'}$, cioè $p = 2, q' = -3$

ed $n = \pm 68$, $l' = -29$, farà $q = \frac{n - n_1}{l'} q_1 + q'_1 = 7$:

quindi $x = \frac{q}{p} = \frac{7}{2}$

II. Ecco già arrivati alla seconda parte del metodo di cui stiamo a trattare, arrivati cioè al punto di soddisfare nell'equazione $k + Ax^2 = Q$ non solo alla condizione di renderla un quadrato perfetto, m' a quella ancora di trovare per x de' numeri interi. E' questa nuova condizione quella che cene prescrive un'altra, di essere cioè Q un quadrato intero, e non fratto.

212. Noi abbiamo veduto nella prima parte di essere indifferente alla soluzione dell'equazione $k + Ax^2 = Q$ il contenere K, A (già sempre intieri) de' fattor quadrati a^2, c^2, cioè di essere $k = a^2 K$, $A = c^2 l$, poichè supposto $x = \frac{ax'}{c}$, venemmo ad ottenere una trasformata $K + lx'^2 = Q$

da cui sene ha il valore di x', e quindi quello di x. Non è così nella nuova condizione, in cui siamo già entrati. Il passaggio della proposta alla trasformata suppone l'equazione $x = \frac{ax'}{c}$, in cui il valore di x dipende da' fattori a, c; fattori che concorrono a renderla sì fratta che intera secondo lo stato del loro valore. Quindi a chiare note si vede che quel passaggio sempre indifferente, e però permesso nella prima parte, potrebbe non esserlo in questa seconda. Quindi la necessità di considerare lo stato relativo di a, c, x, cioè di ,k A, x; stato che andiamo a rilevarlo in parte dall'equazione stessa $x = \frac{ax'}{c}$.

213. La trasformata $K + lx'^2 = Q'$ non è che della medesima forma della proposta, e per rendere unico e non imperfetto il metodo dee certamente risolversi sotto le condizioni medesime, dee risolversi cioè sotto la condizione di x' un numero intero. L'oggetto poi della nostra soluzione non è di trovare x' intero, ma x intero.

L' equazione $x = \frac{ax'}{c}$ non ci dà x intero quando vello è x' che ne' soli casi, in cui x, o a è un multiplo di c. L'essere x' un multiplo di c è una condizione che non abbiamo, e che non vogliamo aggiungere, onde non complicare quel metodo, che cerchiamo semplicizzare con tale trasformazione. Quindi ragionando sotto la condizione che x' intero dee dare x intero nell' equazione $x = \frac{ax'}{c}$, è chiaro che se A conterrà alcun fattor quadrato c^2, non potrà mai eliminarsi dalla proposta se non lo abbia commune con k. Quindi supponendo che K, A abbiano commune questo fattor quadrato, e supponendo che a^2 racchiuda tutti quelli che ne contiene k, sarà $a^2 = e^2 c^2$, e però essendo $k = e^2 c^2 K = e^2 K'$ ed $A = c^2 l$, avremo dalla proposta la trasformata $(B) \ldots K' + l x^2 = Q'''$, in cui K', l sono senza fattor quadrato commune.

214. Stabilito lo stato relativo di a verso e, ed avutane la (B') non ci resta che fissarne quello di

K' rapporto ad x. Infatti incomincio ad osservare questa (B'), e vi veggo che K' può avere de' fattori semplici, o quadrati. Quando ne ha de' semplici solamente dee essere primo con x, poichè se diciamo f uno di tali fattori, e supponiamo di averlo commune con x, avremo $K' = fK''$, ed $x = fx'$, onde la (B') ridotta alla $K'' + fx'^2 = \frac{Q}{f}$, che mai potendosi rendere razionale, ci convince dell' impossibilità dell' ipotesi; quindi la considerazione de' fattori semplici in K' non ci guida che a stabilire K', x numeri primi tra loro.

215. Quando ne ha de' quadrati, allora veggo diversi casi, in cui può trovarsi x relativamente a K', cioè x può essere primo con K' e può contenere uno, o più, o tutti i suoi fattori. Il caso in cui x può esser primo con K', non contrasta in alcun modo le due condizioni sotto cui dobbiamo risolvere la (B'), cioè in numeri interi, e razionali. Veggiamo se vi si oppongono gli altri.

216. Incomincio a supporre K' col solo fattore e^2 ed osservo che essendo $x = ex'$, la (B') si trasformerà nella (C').. $K'' + lx'^2 = Q_1$ in cui K'', x'

son primi tra loro : Questa nuova trasformata può rendersi razionale, e può risolversi in numeri intieri col metodo stesso con cui si risolve la proposta, per esserne nelle medesime circostanze: ma l' equazione $x = ex'$ ci dà x intero quando velo è x': così essendo in K' un sol fattore e^2, è assolutamente indifferente alle due condizioni proposte l' essere x primo con K', oppure contenerne il fattore. Quindi x primo con K', oppure contenerne il fattore. Quindi x può trovarsi in due casi diversi, m' ambedue dipendenti dalla soluzione di un equazione della forma medesima della (B'), sotto le medesime condizioni, e nella circostanza stessa di K', x primi tra loro. Quindi dovranno risolversi due equazioni, l'una come si presenta nella (B'), e l' altra trasformata nella (C') onde ottenerne de'valori diversi che soddisfanno egualmente alla proposta.

217. Passo a supporre in K' i due fattori $e'^2 e''^2$ ed a supporre perciò $x = e'e''x'$, $= e'x''$, $= e''x'''$, onde avrò la (B') trasformata nelle $(C') \ldots K'' + lx'^2 = Q$, $(D') \ldots K''' + lx''^2 = Q$, $(F') \ldots K'''' + lx'''^2 = Q$, nelle quali K'', x';

K''', x'''; K'''', x'''' si riguardano come primi tra loro. Quindi nel caso in cui K' contiene due fattori quadrati la soluzione della (B') può trovarsi in quattro casi diversi, ma tutti dipendenti dalla soluzione di una equazione della medesima forma della proposta, e nella medesima circostanza di K', x primi tra loro; Quindi in questo caso si hanno da risolvere quattro equazioni l'una come si presenta nella (B') e le altre come nelle (C'), (D'), (E').

218. Da queste due considerazioni si raccoglie facilmente che tanti sono i casi diversi, in cui può trovarsi x rapporto a K', e però tante l'equazioni differenti da risolversi, quante sono le combinazioni diverse più uno che si possono fare de' fattor quadrati contenuti in K'; conclusione che venendo confermata dagli altri casi, in cui i fattori di K' son più di due, ci guida a stabilire in generale, che chiamato r il numero de' fattor quadrati di K' si avranno da risolvere tante equazioni, quante sono le diverse unità più una nella somma delle combinazioni diverse degli r fattori ad uno ad uno, a due a due, a tre a tre, ec.; cioè (I.337) quante sono le unità in

$$S = 1 + r + \frac{r(r-1)}{2} + \frac{r(r-1)(r-2)}{2.3} + \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{2.3.4}$$
$$+ \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{2.3.4.5}$$
$$\ldots + \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)(r-5) \ldots 2.r}{2.3.4.5.6 \ldots r}$$

equazioni tutte della forma della (B'), e nella circostanza di essere i corrispondenti K', x primi tra loro. Quindi avviene che qualunque sia il numero de' fattori quadrati contenuti in K' si tratta di risolvere un equazione $B + lz^2 = Q$, in cui B, z sono riguardate come primi tra loro.

219. *Prima* di venire alla soluzione di questa equazione debbo avvertire che Lagrange nelle aggiunte agli elem. di Algeb dell' Eulero, e dietro a lui Pietro Paoli, che sembra di averlo soltanto tradotto, dice che le soluzioni dell' equazioni differenti sono tante quanti sono i fattor quadrati più uno di K'. L' autorità di un geometra sì giustameute celebre e grande mi fa purtroppo temere di aver intraveduto nelle idee a tal soggetto corrispondenti. Per non portar frattanto alla cieca il peso dell' autorità ho vo-

luto esporle in dettaglio; onde esaminare, bilanciare, e provare col fatto chi legge, il mio ed il ragionar del *Lagrange*, per quindi rettificare se avrò commesso un errore.

220. Per risolvere l'equazioni della forma $B+lx^2=Q$, cioè $\frac{Q-lx^2}{B}=1$ in numeri interi razionali, io osservo che essendo B, x primi tra loro, dovrà farsi (205) $Q=(gx-Bu)^2$, onde si avrà $(K)\ldots\frac{g^2-l}{B}x^2-2gux+Bu^2=1$. Per poter risolvere in numeri interi questa equazione è una condizione indispensabile il considerare $\frac{g^2-l}{B}$ come un numero intero l', perchè in diverso caso sarebbe essa impossibile, ed impossibile ne sarebbe ancora la soluzione della proposta. Quindi se niuno de' numeri intieri (135) $l'<+(\frac{1}{4}B+1)$ verrà a soddisfare all' equazione

$\frac{g^2-l}{B} = l'$, ſarà queſto un ſegno che la propoſta non ammette ſoluzione in numeri interi. E' queſto il primo argomento ſulla poſſibilità di arrivare alla ſoluzione in queſta parte domandata; argomento ſimile a quello della prima parte, ma diverſo però nelle conſeguenze, poichè quello non riguarda che alla condizione di p, e non mai di $x\left(=\frac{p}{q}\right)$ un numero intero. Il tutto quindi ſi riduce a riſolvere l'equazione

$(K)\ldots\ l'x^2 - 2gux + Bu^2 = 1$, cioè di trovare per x, u de' numeri interi tali, quanto ſene riduca all'unità il primo membro. Ecco che andiamo a vederlo, onde averne la ſoluzione domandata, o un argomento ſulla ſua impoſſibilità.

221. Suppoſto nella (K), $\frac{x}{u} = P$ avremo la traſformata $u^2(l'P^2 - 2gP + B) = 1$, in cui oſſervo che nel primo membro il fattore $l'P^2 - 2gP + B$ è $= 0$

quando P è razionale. Quindi in questo caso in cui il primo membro della (K) non risulta $=1$, sembra che dia l'argomento impossibile sulla soluzione proposta. Questo caso però trova altrove la sua soluzione quando è possibile (I.426), poichè $l'P^2-2gP+B=0$, ci dà...

$$P=\frac{g\pm\sqrt{(g^2-l'B)}}{l'}=\frac{g\pm\sqrt{l}}{l'}$$ (169), in cui per essere P razionale bisogna che sia l un quadrato perfetto, come si suppone nell'articolo citato (I.426).

222. Esaminato il caso in cui P è razionale, ci resta di esaminarne quelli in cui ne è irrazionale, o immaginario. Il carattere particolare della (K) è quello, che ci suggerisce la maniera, onde compire quest'altro esame. Infatti noi abbiamo veduto, che il primo membro della (K) risulta $=0$ sol quando P è razionale; inoltre sappiamo che esso è composto tutto di quantità intere, e però i suoi valori non possono essere che tutti intieri; sappiamo ancora che l' unità è il più piccolo fra tutti i numeri interi; quindi non si tratta in questo esame che di trovare il minimo fra tutti i valori del primo membro della (K), e vedere se questo minimo $=1$. Vediamolo in generale per quindi discenderne al particolare.

223. Mi propongo adunque di rendere un minimo la quantità (X)... $Ax^n + Bux^{n-1} + Cu^2x^{n-2} + \ldots$ ...Tu^n cioè, di trovare per x, u de' valori interi tali, quanto ne dessero fra tutti il minimo valore. Suppongo a tale oggetto $P = \frac{x}{u}$ onde avrà la (X) trasformata nella

$$u^n (AP^n + BP^{n-1} + CP^{n-2} + \ldots T) = u^n(X').$$

Se chiamo a, a', a'', ec. le radici reali, e $b \pm d\sqrt{-1}$, $b' \pm d'\sqrt{-1}$, ec. le immaginarie della (X'), avremo dalla teoria dell'equazioni che essa può esprimersi nella forma

$$A(P-a)(P-a')(P-a'') \ldots (P-b-d\sqrt{-1})(P-b+d\sqrt{-1})(P-b'-d'\sqrt{-1})(P-b'+d'\sqrt{-1}) \ldots =$$

$$A(P-a)(P-a')(P-a'') \ldots ((P-b)^2+d^2)((P-b')^2+d'^2)$$

Quindi riflettendo che $x = uP$ e che però i fattori della quantità (X) sono generalmente nell' espressione $x - uP$ avremo questa (X) espressa ne' suoi fattori della formula

$$(X'') = A(x-au)(x-a'u)(x-a''u) \ldots \times$$

$$((x-bu)^2 + d^2u^2)((x-b'u)^2 + d'^2u^2) \ldots$$

Tutta la questione adunque si riduce a rendere un minimo il prodotto (X''). Noi abbiamo per proprietà del minimo che i valori di x, u maggiori o minori di quelli ad esso corrispondenti debbono portare ad un risultato sempre maggiore. Per aversi in questo caso un risultato maggiore per (X'') è chiaro che dovrà fra tutti i suoi fattori esservene almeno uno che aumenti, cioè gli stessi valori p, q, che danno per (X'') il minimo valore debbono ancora darlo per uno almeno de' suoi fattori. Quindi è chiaro eziandio che i valori p, q si debbono indispensabilmente trovare fra quei che rispettivamente corrispondono a' valori minimi di questi suoi fattori. Quelli adunque fra questi valori che messi in $(X'')=(X)$ ne danno il minimo risultato sono appunto i p, q che noi cerchiamo. Il tutto adunque si riduce a trovare i valori di x, u che danno alla quantità $x-uP$ il minimo valore; cioè che sostituiti per essi degl' intieri più grandi o più piccioli portano sempre ad un risultato maggiore. Esaminiamo perciò questi fattori $x-uP$; osserviamone il carattere particolare nel caso del minimo; e veggiamo la maniera onde avere i valori di x, u che vi corrispondono.

224. *Osservo* in primo luogo che x, u posso-

no avere lo ſteſſo, o il ſegno contrario. Quando ſono collo ſteſſo ſegno veggo che ciaſcuno de' fattori reali corriſpondenti alle radici reali negative della (X') diviene ſempreppiù picciolo ſecondo che più piccioli diverranno i valori di x,u: veggo inoltre che in ciaſcuno de' fattori doppj immaginarj, la parte d^2u^2 creſce, e diminuiſce ſecondo che creſce, e diminuiſce u, e però non può eſſa contribuire a fargli prendere un valore più grande, quando più piccioli ne ſono quelli di x, u; e la parte $(x-bu)^2$ corriſpondente a b negativa, diminuiſce ſempre quando diminuiſcono x, u. Quindi avviene che eſſendo x, u col ſegno ſteſſo, quelli fra i fattori che corriſpondono alle radici reali negative della (X'), o a quelle immaginarie che hanno negativa la parte reale, reſtano eſcluſi dall'aumentare nel caſo in cui pe' valori di x, u corriſpondenti al minimo viſi mettono de' valori più piccioli.

225. Quando però x, u ſono con ſegno contrario, allora è facile il conchiudere con un raziocinio affatto ſimile che i fattori, i quali non poſſono aumentare quando per x, u corriſpondenti al minimo viſi mettono de' valori più piccioli, ſono quelli che corriſpondono alle radici reali

positive della medesima (X''), o a quelle immaginarie che hanno positiva la parte reale.

Quindi per tutti i fattori si possono trovare per x, u de' valori p, q tali, quanto ne dessero il più picciolo fra tutti i risultati, che si possono avere con degli altri valori più piccioli o più grandi: avvertendo però che dovranno avere il medesimo segno, quando i fattori corrispondono alle radici reali positive, o a quelle immaginarie che ne hanno tale la parte reale, ed un segno diverso quando appartengono alle radici reali negative, o a quelle immaginarie colla parte reale negativa.

226. Ma come trovare questi valori p, q? Eccone la maniera che noi abbiamo diggià prevenuta (52.V.). In effetto abbiamo ivi mostrato che essendo $\frac{p}{q}$ nelle quantità della forma $p-qX$, una delle frazioni convergenti verso X, allora acquisteranno esse de' valori sempre più grandi se per p, q visi metteranno de' numeri più piccioli. Quindi se riduciamo in frazione continua le radici corrispondenti a ciascun de' fattori, se sono reali, o la parte reale

ſe ſono immaginarie, ne avremo le frazioni convergenti $\frac{M^{(n)}}{N^{(n)}}$ (52.IV.), fra le quali dovrà certamente trovarſi, ſe è poſſibile, la $\frac{p}{q}$. Quindi facendo ſucceſſivamente per ciaſcun fattore $\pm x = M^{(n)}$, ed $u = N^{(n)}$ troveremo il più picciolo fra tutti i riſultati, ed avremo perciò i valori di p, q che vi corriſponderanno.

227. Ecco adunque che il carattere particolare dell' equazione (X), quello cioè di avere il minimo fra tutti i valori interi nel ſecondo membro, ci guida ne' due caſi di x irrazionale o immaginaria; poichè ſe ne trattiamo il primo membro col metodo che veniamo di eſporre in generale, cioè ſe ne troviamo i valori di x, u che ne danno il minimo riſultato, ne avremo la ſoluzione cercata eſſendo eſſo $= 1$, o l'argomento impoſſibile nel caſo contrario. Moſtriamo frattanto l' uſo di queſta ſeconda parte del metodo nell'applicazione che eſponiamo in una tavola ragionata, come abbiam praticato ne' precedenti problemi.

Equazione propofta $13x^2 - 159 = Q$ ... $k = -159$, $A = 13$ ... Per eſſere k, A ſenza fattor quadrato comune è $k = K$, $A = l$ ... Per eſſere K ſenza alcun fattore quadrato dee la (B) trovarſi nel caſo della $B + lx^2 = Q$. Quindi $B = K = k = -159$, e $l = A = 13$. Quindi $Q = (gx - Bu)^2$ $= (gx + 159u)^2$. Quindi $\frac{g^2 - l}{B} = \frac{13 - g^2}{159} = l'$, cioè $13 - 159\, l' = g^2$. Quindi $l' < \frac{1}{4} B + 1 < 40$.

Quindi (209) $l' = -9 = -29$, e $g = 38 = 68$.

Quindi le equazioni

$$(X) \ldots \left\{ \begin{array}{l} 9x^2 + 76ux + 159u^2 = -1 \\ 29x^2 + 136ux + 159u^2 = 1 \end{array} \right.$$

Quindi le quantità

$$(X'') \ldots \left\{ \begin{array}{l} 9P^2 + 76P + 159 \\ 29P^2 + 136P + 159 \end{array} \right.$$

in cui P è irrazionale. Quindi ricorro alla tavola (193) onde ſvolgere P in frazione continua.

Quindi finalmente sulla guida di quella ne formo la particolare che si trova qui annessa, avvertendo prima che quantunque le radici di ambedue le (X'') sieno negative, non le considero frattanto che per positive, col supporvi $P = -z$, onde avrò le (X'') trasformate nelle

$$\left.\begin{array}{l} 9z^2 - 76z + 159 \\ 29z^2 - 136z + 159 \end{array}\right) \text{con radici positive;}$$

Tav. per la pag. 74, *contener la sua radice col segno* +

$m = 9,\quad n = -76,\quad \sqrt{13},\quad l < z = 4$

$m' = -1,\quad n' = -4,\quad -1+\sqrt{13},\quad l' < z' = 1$

$m'' = 4,\quad n'' = -6,\quad \frac{\sqrt{13}}{4},\quad l'' < z'' = 1$

$m''' = -3,\quad n''' = 2,\quad -\frac{+\sqrt{13}}{3},\quad l''' < z''' = 1$

$m^{IV} = 2,\quad n^{IV} = -4,\quad \frac{2+\sqrt{13}}{3},\quad l^{IV} < z^{IV} = 1$

$m^{XI} = -1,\quad n^{XI} = 6,\quad -\sqrt{13},\quad l^{XI} < z^{XI} = 6$

$m^{XII} = 4,\quad n^{XII} = 6,\quad \frac{+\sqrt{13}}{4},\quad l^{XII} < z^{XII} = 1$

$m^{XIII} = -3,\quad n^{XIII} = 2,\quad \frac{-3+\sqrt{13}}{3},\quad l^{XIII} < z^{XIII} = 1$

228. Ecco arrivati al ritorno del periodo gi da noi annunciato in fine della tavola (193). L'essere $m^{XII} = m''$, $n^{XII} = n''$ ne forma l' argomento ficuro p r averlo ftabilito nel luogo citato. L'effere $m' = -1$ forma l' altro ivi egualmente dimoftrato, che la (X) ammette una foluzione in numeri interi; foluzione che corrifponde a

$$z = -P = -\frac{x}{u} = \frac{M}{N}, \text{ cioè } a - x = M, u = N.$$

Quindi fi raccoglie che ogni nuovo periodo contenendo $m^{(1+v)} = -1$ in cui $v = 10$, ci darà una nuova foluzione per (X). Quindi continuando il progreffo de' periodi in infinito, avremo una ferie di foluzioni per la propofta; ferie per altro diverfa di quella che potrebbe rifultare dall' altra radice della prima delle (X''), e dalle due della feconda. Quindi formando le ferie convergenti fino ad $\frac{M}{N}$ giufta le tavole date (50), avremo $M = 4$, $N = 1$, e però $x = -4$, $u = 1$: donde $Q = 49$; valori che foddisfanno alla propofta enunciata $13x^2 - 159 = Q$.

229. In questo luogo non tralascio avvertire che ometto le altre tre tavole corrispondenti alle rimanenti tre radici, perchè sono nell' obbligo di calcolare una formula generale che data una soluzione ne rappresenti tutte le altre. Il calcolo di questa formula è che forma il soggetto del problema seguente, di cui vado già allo sviluppo.

PROB. 50

Trovar le formule del numero (l.439)

230 Il quesito che forma il soggetto di questa enunciazione non è che un seguito della seconda parte del problema precendente. Noi adunque senza avvertimento alcuno faremo uso in questo dettaglio di quello che sarà per occorrerci, e che si contiene in quella parte. Entriamo perciò nell' indicato dettaglio, ed incominciamo coll' avvertire che le formule domandate nel numero enunciato non sono che un caso particolare di quella che noi siamo per calcolare. Proponiamoci adunque che dati i valori p, q di x, u tali che soddisfacciano all'equazione

$(K)\ l'x^2 - 2gxu + Bu^2 = 1$, trovarne tutti gli altri che la risolvono egualmente sotto le medesime condizioni, e di tirarne quindi come un corollario le formule del numero in questione.

231 Rifletto in primo luogo che p, q sono

de' numeri primi fra loro, poichè (52. V.) sono i termini di una delle frazione convergenti verso X. Quindi posso sempre trovare due numeri interi m', n' quanto sodisfacciano all' equazione $pn'-qm'=1$. Suppongo poi $x=pt+m'y$, $u=qt+n'y$ nella (K), onde avrò la trasformata

$$(p^2l'-2gpq+Bq^2)t^2+2(pm'l'-g(pn'+qm')$$
$$+Bqn')ty+(m'^2l'-2gm'n'+Bn'^2)y^2=1$$

ovvero fatto

$$P=p^2l'-2gpq+Bq^2$$

$$Q'=pm'l'-g(pn'+qm')+Bqn'$$

$$R=m'^2l'-2gm'n'+Bn'^2$$

avrò la $Pt^2+2Q'ty+Ry^2=1$, che passo ad esaminarla, onde cercar la maniera di renderla più semplice, ed alla soluzione più facile.

232 Veggo in questa equazione che $P=1$, poichè ho per ipotesi che $x=p$, $u=q$ soddisfanno alla (K). Veggo inoltre (I. 407) che chiamando f, h duè valori di m', n' che avverano l'equazione $pn'-qm'=1$, sene avranno tutti gli altri che vi soddisfanno egualmente rappresentati dalle formule generali $m'=f+kp$, $n'=h+kq$, in cui k è un' indeterminata da determinarsi all' opportunità; e che però

sostituiti in Q', R ci danno non solo le espressioni generali di tutti i valori di cui son essi capaci, ma ci presentano ancor la maniera di poter corrispondere alla semplicizzazione che ci abbiamo proposto, mercè la determinazione di k che essi racchiudono. Sostituiti in effetto questi valori in Q', R si avrà.

$$Q' = pfl' - g(ph+fq)+Bqh + k(p^2l' - 2gpq+Bq^2) = pfl' - g(ph+qf)+Bqh+k$$

$$R = f^2l' - 2ghf+Bh^2 + 2k(fpl' - g(ph+qf)+Bhq) + k^2$$

Quadrando il valor di Q' veggo che diviene $=0$ supponendo $k = -pfl' + g(ph+qf) - Bqh$, e che con ciò la trasformata con tre termini si riduce ad averne due soli. Mettendo inoltre in R questo valore di k avremo.

$$R = f^2l' - 2ghf+Bh^2 - k^2 = f^2l'\left(1 - p^2l' + 2gpq\right) + Bh^2\left(1 - Bq^2 + 2gpq\right) - 2ghf\left(1 - Bq^2 - p^2l'\right) - 2Bl'pqhf - g^2\left(p^2h^2 + 2hpqf + q^2f^2\right)$$

$$= -(g^2 - Bl')(ph - qf)^2 = -g^2+Bl' = (220) - l.$$

Quindi coll'assumere per k questo valore, noi avremo la (K') ridotta alla (K') $t^2 - ly^2 = 1$: equazione semplicissima che risoluta in numeri

razionali interi ci dà i valori di t, y, e quindi quelli di x, u.

233. Infatti il valore di k già ſtabilito pel caſo noſtro ci dà $m' = gp - Bq$, $n' = pl' - gq$, e quindi $x (= pt + m'y) = pt + (gp - Bq)y$, $u (= qt + n'y) = qt + (pl' - gq)y$. Tutta la ricerca adunque ſi riduce a riſolvere in numeri interi razionali l' equazione (K'). Eſamino pertanto i caſi diverſi in cui può trovarſi queſta equazione. Due ſono quelli che miſi preſentano a primo ſguardo, quelli cioè di l negativa, o poſitiva. Quando l è negativa, l'equazione (K') diviene $t^2 + ly^2 = 1$, la quale non può verificarſi che nel ſolo caſo, in cui $y = 0$, $t = 1$, e però in cui diviene $x = p$, $u = q$, ed in cui la (K), e perciò lo propoſta $B + lx^2 = Q$ non ammette che una ſola ſoluzione corriſpondente al valore p di x. Quando l è poſitiva, allora ſi contengono in queſto caſo altri due caſi, quelli cioè di l razionale, o irrazionale.

234. Se l è razionale, cioè $l = h^2$, avremo la (K') traſformata nella $t^2 - h^2 y^2 = (t - hy)(t + hy) = 1$:

donde $t-hy=\pm 1$, $t+hy=\pm 1$, cioè $t-hy=t+hy$, da cui si deduce $y=0$, e però $t=\pm 1$; risultato che ci porta all' unica e medesima soluzione di $x=p$. Noi però sappiamo altronde (l. 426) trattar l' equazione in questo caso particolare come notammo (221)

235. Se l è irrazionale facilmente veggiamo che la (K') è un caso particolare della (K), che corrisponde cioè al caso in cui $l'=1$, $g=0$, e però $B=-l$. Quindi essendo l positivo e irrazionale sappiamo trovare col metodo con cui abbiamo trattato la (K) nella seconda parte del problema precedente, i valori più piccioli p', q' di t, y che la risolvono. Quindi chiamando come sopra m'', n'' due numeri interi che soddisfacciano all' equazione $p'n''-q'm''=1$, t', y' due valori qualunque di t, y; e supponendo $t=p't'+m''y'$, $y=q't'+n''y'$, sarà $t^2-ly^2=(p'^2-lq'^2)t'^2+2(p'm''-lq'n'')t'y'$ $+(m''^2-ln''^2)y'^2=1$, ovvero fatto

$$P'=p'^2-lq'^2$$

$$Q''=p'm''-lq'n''$$

$$R'=m''^2-ln''^2$$

si avrà $P't'^2 + 2Q''t'y' + R'y'^2 = 1$. Quindi riflettendo che $P' = 1$; che chiamati f', h' due de' valori di m'', n'', e però fatto $m'' = f' + k'p'$, $n'' = h' + k'q'$ si avrà $Q'' = k'(p'^2 - q'^2 l) + p'f' - q'h'l = k' + p'f' - q'h'l$, ed $R' = f'^2 - lh'^2 - k'^2$; che fatto $k' = -p'f' + q'h'l$, sarà $Q'' = 0$, ed $R' = f'^2(1 - p'^2) - h'^2 l(1 + lq'^2) + 2f'p'q'h'l = -l(p'h' - q'f')^2 = -l$
Quindi finalmente sostituendo tuttocciò nella $P't'^2 + 2Q''t'y' + R'y'^2 = 1$, ne avremo la trasformata K''. . $t'^2 - ly'^2 = 1$. Quindi essendo $m''(= f' + k'p') = lq'(p'h' - q'f') = q'l$, $n''(= h' + k'q') = p'(p'h' - q'f') = p'$ sarà, $t = p't' + lq'y'$, $y = q't' + p'y'$
Chiamati p'', q'' i valori più piccioli di t', y', trattata la K'' nel modo stesso della K'; ne avremo la K'''. $t''^2 - ly''^2 = 1$, $t' = p''t'' + lq''y''$, $y' = q''t'' + p''y''$
Continuando a ragionare così noi possiamo formare il seguente quadro delle successive operazioni

$K'. . t^2 - ly^2 = 1,\ t = p', y = q'$ ci danno

$t'^2 - ly'^2 = 1$, e $t = p't' + lq'y', y = q't' + p'y'$

$K''. . t'^2 - ly'^2 = 1,\ t' = p'', y = q''$ ci danno

$t''^2 - ly''^2 = 1$, e $t' = p''t'' + lq''y'', y' = q''t'' + p''y''$

$K'''. . t''^2 - ly''^2 = 1,\ t'' = p''', y = q'''$ ci danno

$t'''^2 - ly'''^2 = 1$, e $t'' = p'''t''' + lq'''y''', y'' = q'''t''' + p'''y'''$

. . . .

$K^{(m)}. . t^{(m-1)2} - ly^{(m-1)2} = 1, t^{(m-1)} = p^{(m)}\ y^{(m-1)} = q^{(m)}$ ci danno

$t^{(m)2} - ly^{(m)} = 1$, e $t^{(m-1)} = p^{(m)}t^{(m)} + lq^{(m)}y^{(m)}$

$y^{(m-1)} = q^{(m)}t^{(m)} + p^{(m)}\ y^{(m)}$

236. Si rifletta che le due ultime linee di questo quadro ci danno in ciascuna delle formule, di cui son composte tutti i valori di t, t', t'' ec. di y, y', y'', ec. che soddisfanno all'equazioni corrispondenti K', K'', K''' ec. Quindi se mettiamo successivamente i valori di t', t'' ec. di y', y'', ec. in quelli di t, y noi ne avremo un corpo di formule che diversamente ed in generale cene esprimono i valori, ne avremo cioè le seguenti diverse formule generali de' valori di t, e di y,

$$t = p't' + lq'v'$$

$$t = (p'p'' + lq'q'')\,t'' + l(p'q'' + q'p'')\,y''$$

$$t = (p'''(p'p'' + lq'q'') + l(p'q'' + q'p'')q''')\,t''' + l\,q'''(p'p'' + lq'q'') + (p'q'' + q'p'')p''')\,y'''$$

ec.

$$y = q't' + p'y'$$

$$y = (q'p'' + p'q'')\,t'' + (p'p'' + lq'q'')\,y''$$

$$y = (p'''(q'p'' + p'q'') + (p'p'' + lq'q'')q''')\,t''' + (l\,q'''(q'p'' + p'q'') + (p'p'' + lq'q'')p''')\,y'''$$

ec. ec.

237 Se in ciascuna di queste formule mettiamo pe' rispettivi $t^{(m)}$, $y^{(m)}$ i loro più piccioli valori $p^{(m+1)}$, $q^{(m+1)}$, che si hanno dalla corrispondente equazione $K^{(m+1)}$, è chiaro che noi ne avremo per t, y il più picciolo valore di cui ciascuna è capace, ed avremo perciò un corpo di valori diversi di t, y che io dispongo quì sotto coll' ordine stesso delle formule che ci danno

$$t = p'p'' + lq'q''$$
$$t = (p'p'' + lq'q'')p''' + l(p'q'' + q'p'')q'''$$
$$t = (p'''(p'p'' + lq'q'') + l(p'q'' + q'p'')q''')p^{IV}$$
$$+ l(q'''(p'p'' + lq'q'') + (p'q'' + q'p'')p''')q^{IV}$$

ec. ec.

$$y = q'p'' + p'q''$$
$$y = (q'p'' + p'q'')p''' + (p'p'' + lq'q'')q'''$$
$$y = (p'''(q'p'' + p'q'') + (p'p'' + lq'q'')q''')p^{IV}$$
$$+ (lq'''(q'p'' + p'q'') + (p'p'' + lq'q'')p''')q^{IV}$$

ec. ec.

238. I nostri raziocinj sono stati diretti in generale, e perciò non hanno avuto riguardo alcuno alla medesimezza dell'equazioni $K^{(m)}$, e perciò a quella, de' più piccioli valori di $t^{(m)}$, $y^{(m)}$ che da esse sene hanno. Quindi avvertendo a questo carattere particolare dalle $K^{(m)}$, ed introducendolo nella raccolta de' diversi valori di t, di y, cioè facendovi $p' = p'' = p''' =$ ec. $q' = q'' = q''' =$ ec. l'avremo trasformata nella seguente, cui aggiungiamo ancora il più picciolo valor p', y' di t, y che niuna di quelle formule generali ci potea dare, ed in cui introduciamo degl' indici onde notare la successione dei valori di

t, di y, che come può facilmente rilevarsi sempre progrediscono dal più picciolo al più grande

$t_1 = p'$

$t_2 = p'^2 + lq'^2$

$t_3 = p'(p'^2 + 3lq'^2)$

$t_4 = p'^2 (p'^2 + 3lq'^2) + lq'^2 (3p'^2 + lq'^2)$

ec. ec.

$y_1 = q'$

$y_2 = 2p'q'$

$y_3 = q'(3p'^2 + lq'^2)$

$y_4 = p'q'(3p'^2 + lq'^2) + p'q'(p'^2 + 3lq'^2)$

ec. ec.

Osservando il progresso di questi valori si rileva facilmente nelle formule

$$\left.\begin{array}{l} t_m = p't_{m-1} + lq'y_{m-1} \\ y_m = p'y_{m-1} + q't_{m-1} \end{array}\right\} \text{la legge di essi}$$

239. Queste due formule son quelle che ci portano a rispondere all' enunciazione proposta, a trovarne cioè altre due le quali ci dessero tutti i valori di t, y, mercè la cognizione soltanto del più picciolo di essi.

In effetto se moltiplico per $\sqrt{l}$ la seconda di queste due formule, e quindi la sommo e sottraggo della prima ne avrò le due equazioni

$$t_m \pm y_m \sqrt{l} = (p' \pm q'\sqrt{l})(t_{m-1} \pm y_{m-1}\sqrt{l}):$$

ma siccome la tavola, cui queste due formule si rapportano ci dà costantemente

$$t_m \pm y_m \sqrt{l} = (p' \pm q'\sqrt{l})^m \quad \text{così avremo}$$

$$t_m \pm y_m \sqrt{l} = (p \pm q'\sqrt{l})^m$$

donde sene ottengono le formule cercate

$$(Z) \begin{cases} t_m = \dfrac{(p' + q'\sqrt{l})^m + (p' - q'\sqrt{l})^m}{2} \\ y_m = \dfrac{(p' + q'\sqrt{l})^m - (p' - q'\sqrt{l})^m}{2\sqrt{l}} \end{cases}$$

Queste formule che si presentano sotto forma irrazionale non sono che razionali, poichè se sviluppiamo in serie le parti che le compongono, ne vedremo svanire le quantità irrazionali, ne avremo cioè

$$t_m = p'^m + \frac{m(m-1)}{2} l p'^{m-2} q'^2$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4} l^2 p'^{m-4} q'^4 + \text{ec.}$$

$$y_m = m p'^{m-1} q' + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} l p'^3 q'^3$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3.4.5} l^2 p'^{m-5} q'^5 \text{ ec.}$$

240. *Queste* espressioni ci dicono che i valori di t, y da esse rappresentati sono in termini finiti, perchè finito ed intero è m: sono interi, perchè interi ne sono i coefficienti delle quantità ancora intere l, p', q': sono tutti maggiori di p', q', perchè tutti i lor termini hanno il medesimo segno: sono infine non solo delle soluzioni diverse della proposta, ma sono tutte le soluzioni di cui essa è capace, perchè andiamo a vederlo.

241. Per convincerci di quest' ultimo carattere di tali espressioni, esamino se tra t_{m-1} e t_m, tra y_{m-1}, ed y_m può esistere un altro valore O, e v che soddisfaccia egualmente alla $t^2 - ly^2 = 1$. Io adopro una di quelle prove che si dicono negative, e suppongo perciò l'esistenza di questo valore. Metto a paragone le tre equazioni

$$t^2_{m-1} - ly^2_{m-1} = 1$$

$$(A)\ldots\quad O^2 - lv^2 = 1$$

$$t^2_m - ly^2_m = 1$$

che si hanno dalla proposta col farvi successivamente $t = t_{m-1} = O = t_m$, $y = y_{m-1} = v = y_m$; incomincio ad osservare che i valori intermedj di t, y paragonati cogli ultimi mi danno per t, y due nuovi valori, cioè mi danno

$$M\ldots t = Ot_m - lvy_m$$

$$N\ldots y = Oy_m - vt_m$$

che soddisfanno ancora alla $t'^2 - ly'^2 = 1$, poichè sostituiti in essa mi guidano all' equazione identica $(O^2 - lv^2)(t_m^2 - ly_m^2) = 1$. Cerco adunque di scoprire il carattere di questi nuovi valori di t, y; carattere che io non posso rilevare dalle sole espressioni che li rappresentano, perchè non conosco le quantità O, v. Dal paragone de' valori estremi di t, y ne formo le due quantità

$$M' = t_{m-1}t_m - ly_{m-1}y_m$$

$$N' = t_{m-1}y_m - y_{m-1}t_m$$

che sieno perfettamente simili all' espressioni M, N ed osservo che mercè la sostituzione de' valori di t_{m-1}, t_m, y_{m-1}, y_m presi dalle formule (Z), esse divengono $M' = p'$, $N' = q'$. Quindi paragonando M, N, con M', N' io non fo che paragonarli con p', q', di cui ne conosco il carattere particolare di essere i numeri più piccioli fra tutti i valori di t, y. Per eseguire con più facilità un tal paragone cerco di trasformare queste espressioni. Infatti le tre equazioni (A) mi danno

$$t_{m-1} = y_{m-1}\sqrt{l} + \frac{1}{t_{m-1} + y_{m-1}\sqrt{l}}$$

$$O = v\sqrt{l} + \frac{1}{O+v\sqrt{l}}$$

$$t_m = y_m\sqrt{l} + \frac{1}{t_m + y_m\sqrt{l}}$$

valori che sostituiti nelle quantità da paragonarsi, cioè nelle M, M', N, N', si avrà

$$M = t = \frac{y_m\sqrt{l}}{O+v\sqrt{l}} + \frac{v\sqrt{l}}{t_m + y_m\sqrt{l}} + \frac{1}{(O+v\sqrt{l})(t_m + y_m\sqrt{l})}$$

$$M' = \frac{y_m\sqrt{l}}{t_{m-1} + y_{m-1}\sqrt{l}} + \frac{y_{m-1}\sqrt{l}}{t_m + y_m\sqrt{l}} + \ldots$$

$$\frac{1}{(t_{m-1} + y_{m-1}\sqrt{l})(t_m + y_m\sqrt{l})}$$

$$N = y = \frac{y_m}{O+v\sqrt{l}} - \frac{v}{t_m + y_m\sqrt{l}}$$

$$N' = \frac{y_m}{t_{m-1} + y_{m-1}\sqrt{l}} - \frac{y_{m-1}}{t_m + y_m\sqrt{l}}$$

Quindi osservando che $t_{m-1} < t_m$; che O è tra t_{m-1} e t_m, e perciò $O < t_m$, $> t_{m-1}$; che $y_{m-1} < y_m$; e che v è tra y_{m-1} ed y_m, e perciò $v < y_m$, $> y_{m-1}$: riesce facile il paragone delle dette quantità. Se ci facciamo a paragonarle termine per termine, ne rileveremo che $M < M'$, e che $N < N'$, cioè che i nuovi valori di t, y, cui ci porta l'ipotesi dell' esistenza di due valori tra t_{m-1} e t_m, tra y_{m-1} ed y_m sono minori di p', q', cioè minori de' più piccioli possibili; locchè essendo in contradizione pronuncia sull' impossibilità di questa ipotesi, e perciò ci prova l' ultimo carattere delle formule (Z).

24. Ci resta solo l' applicazione della teoria generale al caso del numero enunciato, onde soddisfar pienamente all' impegno propostoci. In effetto l' equazione di cui si tratta nel numero in questione si è $1+Ax^2 = Q$, ovvero $Q-Ax^2 = 1$. Questa equazione non è che della forma della $t^2-ly^2 = 1$. Quindi paragonandola con essa abbiamo $t = \sqrt{Q}$, $A = l$, $x = y$, $p' = q$, e $q' = p$. Quin-

di ... formule (Z) si trasformano pel caso in questione nelle

$$x = \frac{(q+p\sqrt{A})^m - (q-p\sqrt{A})^m}{2\sqrt{A}}$$

$$\sqrt{Q} = \frac{(q+p\sqrt{A})^m + (q-p\sqrt{A})^m}{2},$$

che sono quelle stesse portate dall' Autore delle lezioni, e che formavano il soggetto delle nostre ricerche.

PROB. 51.

Un viaggiatore osservando le rarità di una casa illustre di Toscana s' invaghì di varj quadri di due diverse scuole e sopra tutto di uno in Lavagna, opera antica ove è dipinta una Musa. Voleva acquistarli e ne offeriva in prezzo una cassetta di fondo quadro piena di zecchini dispositivi in 144 piani: onde essendo le pitture di ciascuna scuola tra 80 e 100 avrebbe dati per ogni pezzo tanti zecchini quanti erano i pezzi della scuola rispettiva, e tanti per la Musa quanti erano i pezzi delle due scuole moltiplicati insieme. Determinare quante erano e quanto sarebbero importate le pitture di ciascuna scuola; quanto veniva a pagarsi la Musa, quanti zecchi-

ni erano in ciascun piano della cassetta, e qual'era la loro somma totale.

243. Rifletto sull'enunciazione del problema proposto, e vi rilevo due espressioni della somma medesima di zecchini offerta in prezzo di tutte le pitture. In fatti se chiamo x, x' il numero de' pezzi delle due scuole enunciate, ne avrò x^2, x'^2 pe' loro prezzi rispettivi, xx' per quello della Musa, e però $x^2+xx'+x'^2$ pel prezzo totale delle pitture in questione. Se chiamo inoltre o'^2 il numero degli zecchini contenuto in ciascun piano della cassetta enunciata, avrò $144o'^2$ pel prezzo totale delle pitture medesime. Quindi avrò l'equazione $x^2+xx'+x'^2=144o'^2$, dalla cui soluzione dipende lo sviluppo di questo problema.

244. Se risolverei per x questa equazione, rileverei che la sua soluzione è dipendente da un'altra della forma e nelle medesime circostanze di quella di cui abbiamo parlato nei tre problemi precedenti, la quale trova però la sua soluzione (I.425) Noi frattanto faremo dipendere questa soluzione da quella dell'equazione generale

delle Indeterminate del secondo grado, cioè dell' equazione (M) . . $Au^2+B'uv+Cu^2+Du+Ev+F=0$ onde dare ancora a questo metodo del sommo Lagrange una veduta più semplice, un progresso più ragionato ed uniforme come mi sono ingegnato (forse non vi avrò riuscito) di praticare in tutti gli altri, che lo sviluppo de' precedenti problemi mi ha chiamato ad esporre.

245 Incomincio ad avvertire che A, B', C, D, E, F sono delle quantità intere, e che si debbono ritrovare per u, v de' numeri ancora interi. Dopo ciò passo a risolvere per u la proposta (M), onde avrò la

$$(N) .. 2Au+D=\sqrt{((B'v+D)^2-4A(Cv^2+Ev+F))}.$$

Quindi la (M) dipende dalla soluzione della $(B'v+D)^2-4A(Cv^2+Ev+F)=Q$, ovvero facendo per maggior semplicità

$B^2-4AC=l$, $BD-2AE=f$, $D^2-4AF=t'$, dipende dalla soluzione della $lv^2+2fv+f'=x^2$. Risolvendo ancor questa, ne avremo

$lv+f=\sqrt{(lx^2+f^2-lt')}$, ovvero fatto $f^2-lt'=B$, ne avremo la (O) . . $lv+f=\sqrt{(lx^2+B)}$. Quindi

la soluzione della (N) dipende da quella della $B + lx^2 = Q$, che sappiamo risolvere giusta il metodo esposto ne' tre problemi precedenti, da cui prenderemo tutto l' occorrente a questo dettaglio senza alcuno avvertire.

246. Trovati in effetto i valori di x, e $\sqrt{Q}$, avremo dalla (O)..$lv+f=\pm\sqrt{Q}$, e dalla (N)..$2Au+B'v+D=\pm x$: donde si ottiene

$$v=\frac{\pm\sqrt{Q}-f}{l},\ u=\frac{\pm x-D-B'v}{2A}.$$

Sono questi valori quelli che c' insegnano che non basta risolvere in interi l' equazione $B+lx^2=Q$, onde soddisfare alla condizione di trovare per v,u de' numeri interi, ma bisogna scegliere fra tutti i valori di x, e $\sqrt{Q}$ quelli soltanto che godono la proprietà di rendere tali v,u. Noi andiamo a compire questa ricerca, onde compire ancora il dettaglio che ci abbiamo proposto.

247. Prendo l' equazione $B+lx^2=Q$, e rifletto che essendo l negativo, abbiamo veduto (233)

che x, e $\sqrt{Q}$ non possono avere che un solo valore, il quale non dando per v, u de' numeri interi, ci dà l'argomento certo e sicuro che la proposta (M) non ammette soluzione in numeri interi; che essendo l razionale positivo, sappiamo (l. 426) che il numero delle soluzioni è sempre finito, e perciò col provarle l'una presso l'altra possiamo rilevare se niuna, o una, o più di esse danno per v, u de' numeri interi, e perciò se la proposta (M) ammette o non ammette una o più soluzioni; che essendo finalmente l irrazionale positivo, trovammo (235) che x, e $\sqrt{Q}$ possono avere un numero infinito di valori diversi. Come trovare in quest' ultimo de' tre casi, in cui la $B+lx^2=Q$ può trovarsi, se la proposta è impossibile nelle condizioni proposte, oppure ammette una o più soluzioni? E' questo ciocchè andiamo brevemente a vedere.

248. Se prendo (220. 233)

$$\sqrt{Q}=gx-Bu', \ x=pt+(gp-Bq)y, \ u'=qt+(pl-gq)y$$

e vengo a sostituirli nelle espressioni di v, u, avrò

$v = \frac{1}{l}(\pm(gp-Bq)t \pm g'(gp-Bq) - B(l'p-gq)y - f) =$

(ſuppoſto $\pm(gp-Bq) = b$, $l = l''$, $\pm g'(gp-Bq) - B(l'p-gq) = d$) $\frac{bt+dy-f}{l''}$, e quindi

$$u = \frac{1}{2Al}(\pm(pl \mp Bb)t \pm l'(pg-Bq) - B'd)y + B'f - Dl)$$

$=$(ſuppoſto $\pm pl - Bb = b'$, $\pm l(pg-Bq) - B'd = d'$,

$Dl - B'f = f''$, $2Al = l'''$) $\frac{b't+d'y-f''}{l'''}$

La ſomiglianza di queſti due valori, fa che i raziocinj generali che poſſiamo applicarvi non debbono eſſere che tutti ſimili. Quindi è che parliamo di uno ſoltanto di eſſi.

249 Si tratta adunque di rendere intera l'eſpreſſione $v = \frac{bt+dy-f}{l''}$, ſi tratta cioè di determinare nelle formule (Z), quali ſono quei valori di t, y, ovvero qual dee eſſere il valore di

m, onde si abbiano per t, y de' valori tali che rendano $bt+dy-f$ un multiplo di l^n. Rifletto a tale oggetto che essendo indefinito il numero de' valori di t, y, non possiamo provarli l'uno dopo l'altro, onde rilevare il numero delle soluzioni della proposta, poichè non possiamo provarli tutti. Ma se però questi valori di t, y son tali quanto divisi successivamente per l^n dessero de' residui che ritornano con un certo periodo, possiamo allora col tentarvi soltanto quei contenuti nel primo periodo, sapere questo numero di soluzioni. Ciò è chiaro, e passo perciò ad esaminare se mai esiste un tal periodo.

250. L'equazione $t^2-ly^2=1$ c'insegna esser sempre possibile fra i valori di y trovarne uno multiplo di l^n, poichè se vi supponghiamo $y=al^n$ l'avremo trasformata nella $t^2-ll^{n2}a^2=1$; equazione sempre solubile in numeri interi; equazione che si risolve col mettere ll^{n2} a luogo di l nella soluzione della $t^2-ly^2=1$. Quindi essendo possibile il trovare per a un numero intero, lo è egualmente il trovare per y un multiplo di l^n.

Questa equazione c' insegna inoltre che essendo y multiplo di l^n, non può esserlo nello stesso

tempo t, poichè in tal caso essa verrebbe a trasformarsi nella $t'^2 - la^2 = \frac{1}{l''^2}$, che non può mai risolversi in numeri interi.

251. Dopo una tale riflessione passo a chiamare n il valore di m corrispondente al primo de' valori di y multipli di l'', ed a cercare qual sarà il valore dello stesso m, che chiamo $n+r$, acciò y sia nuovamente multiplo di l''. Prendo poi (239) le formule $t_m \pm y_m \sqrt{l} = (p' \pm q' \sqrt{l})^m$, che applicate al caso nostro ci danno

$$t_n \pm y_n \sqrt{l} = (p' \pm q' \sqrt{l})^n, \; t_r \pm y_r \sqrt{l} = (p' \pm q' \sqrt{l})^r$$

epperò

$$t_{n+r} \pm y_{n+r} \sqrt{l} = (p' \pm q' \sqrt{l})^{n+r}$$
$$= (t_n \pm y_n \sqrt{l})(t_r \pm y_r \sqrt{l}).$$

Paragonando finalmente fra loro le parti razionali ed irrazionali di quest' ultima espressione, ne avrò $t_{n+r} = t_n t_r + l y_n y_r$; ed $y_{n+r} = t_r y_n + y_r t_n$. Quindi per determinare il

valor di r sotto la condizione proposta metto in queste due espressioni il valore $y_n = al''$, onde avrò

$$\frac{t_{n+r}}{l''} = \frac{t_n t_r}{l''} + aly_r$$

$$\frac{y_{n+r}}{l''} = \frac{y_r t_n}{l''} + at_r$$

252. Osservo poi che nella seconda di queste espressioni non potrà y_{n+r} essere un multiplo di l'' senza che velo sia y_r, perchè si avrebbe altrimenti un intero eguale ad un rotto; che y_r e però y_{n+r} sarà sempre un multiplo di l'' quando si farà successivamente $r = n = 2n = 3n =$ ec. perchè $r = n$ dà $y_r = y_n$ che per ipotesi è multiplo di l'', e però $y_{n+r} = y_{2n}$ anche multiplo di l''; $r = 2n$ dà $y_r = y_{2n}$ multiplo di l'' e però $y_{n+r} = y_{3n}$ anche multiplo di l'', e così di seguito; e che finalmente la prima di tali espressioni dà successivamente in questi valori di r,

$t_{2n} = t_n^2 + ly_n^2 =$ (per essere $t_n^2 - ly_n^2 = 1$, ed

$y_n = l^n a$) $1 + 2ll^{n2}a^3$

$t_{3n} = t_n t_{2n} + ly_n y_{2n} =$ (intendo E un num. int.)

$t_n(1 + El^n) + El^n = t_n + El^n$

$t_{4n} = t_n t_{3n} + ly_n y_{3n} = t_n(t_n + El^n) + El^n =$

$t_n^2 + El^n = 1 + El^n$

ec. ec. ec.

epperò

$$\frac{t_{2n} - 1}{l^n} = E$$

$$\frac{t_{3n}}{l^n} = \frac{t_n}{l^n} + E$$

$$\frac{t_{4n} - 1}{l^n} = E$$

ec. ec.

Quindi si raccoglie facilmente che i valori di y multipli di l'' non possono essere più distanti fra loro del numero di unità contenute in n, ma che quei di t i quali divisi per l'' danno il resto medesimo possono distare però di $2n$. Quindi i valori di t, di y che debbonsi mettere a prova (249) sono sempre $2n$. Quindi trovato nell' indicata maniera (250) il primo valor di y multiplo di l''; messo nella seconda delle formole (Z); fatto consecutivamente $m = 1 = 2 = 3 =$ ec. fino a tanto che essa diviene identica; e determinato così il valore n di m, si avrà la grandezza $2n$ del cercato periodo. Quindi continuando i valori di m fino a $2n$ non solo nella seconda ma nella prima ancora delle formole (Z), si avrà corrispondente ad $m = 2n$ un nuovo valor di y multiplo di l'', e per t il valor t_{2n} che diminuito di 1 sappiamo che anch' esso è multiplo di l''. Quindi conosciamo in tal maniera non solo il numero e i valori $2n$ di t, di y compresi nel primo periodo de' loro infiniti contenuti nelle formule (Z), ma sappiamo eziandio che l' ultimo de' valor $2n$ di t diminuito di 1, e l' ultimo de' $2n$ di y ritornano costantemente ad essere multipli di l'' alla fine di ogni altro periodo. Quindi finalmen-

te conoſcendo la grandezza coſtante de' periodi di cui ſi parla, conoſcendo la relazione dell' ultimo valor di t, di y con l'' in ciaſcuno di eſſi; non ci reſta che eſaminarne quelli degli altri valor di t di y collo ſteſſo l'' di un periodo all'altro.

253. In effetto per eſeguire queſt' altro eſame ſia ſuppoſto $m = 2n + m$, onde eſprimere tutti i valori di m per ciaſcuno di queſti periodi, ſieno riprese le formule citate (250)

$t_m \pm y_m \sqrt{l} = (p' \pm q' \sqrt{l})^m$, e ne avremo

$$t_{2n+m} \pm y_{2n+m} \sqrt{l} = (p' \pm q' \sqrt{l})^{2n+m}$$

$$= (p' \pm q' \sqrt{l})^{2n} (p' \pm q' \sqrt{l})^m$$

$= (t_{2n} \pm y_{2n} \sqrt{l})(t_m \pm y_m \sqrt{l})$. Quindi eſeguendo la moltiplicazione indicata, ed eguagliando gl' irrazionali e razionali partitamente fra loro, avremo

$$t_{2n+m} = t_{2n} t_m + l y_{2n} y_m$$

$$y_{2n+m} = t_{2n} y_m + y_{2n} t_m$$

ovvero per eſſere y_{2n}, e $t_{2n} - 1$ de' multipli di l'', avremo

$$t_{2n+m}=t_m(1+El')+El''=t_m+El''$$

$$y_{2n+m}=y_m+El'$$

donde sene ottiene

$$\frac{t_{2n+m}}{l'}=E+\frac{t_m}{l''}$$

$$\frac{y_{2n+m}}{l''}=E+\frac{y_m}{l'}$$

cioè che i valori di t, y contenuti in alcuno degl' indicati periodi danno il medesimo resto de' valori corrispondenti negli altri. Quindi possiamo conchiudere in generale che mettendo successivamente nelle espressioni de' valori di u, v quei di t, di y di uno soltanto di questi periodi, avremo l' argomento sicuro sulla solubilità della proposta equazione, poichè se niuno de' $2n$ valori in esso contenuti non faranno risultare intere quell' espressioni, saremo certi che qualunque di quei contenuti negl'altri periodi, avendo in quello il suo corrispondente, che diviso per l'' dà il medesimo resto, giammai vele potran fare risultare, e perciò che non potranno soddisfare alla proposta. Quindi possiamo ancora conchiudere in generale che mettendo successivamente dall'

$m = 1$ fino all'$m = 2n$, cioè fino a' valori in cui $t-1$, ed y divengono multipli di l'' inclusivamente, i valori di t, di y nell'espressioni di u, v', già sappiamo che l'equazione è impossibile se niuno di essi le renderà intere; ma se uno o più di essi ve le renderà tali allora bisogna osservare che u, v' quantunque sieno delle funzioni di t, y sono frattanto diversi, e perciò il valore di t, y corrispondente al medesimo valor di m non può farle intere ambedue. Quindi uop'è determinare fra tutti i valori di t, di y, corrispondenti in tutti i periodi a quei del periodo di prova, che soddisfanno a quella condizione, quelli che vi soddisfano simultaneamente, quelli cioè che danno nello stesso tempo intero tanto u che v'

254. Per arrivare a questa determinazione chiamo m' i valor di m, che nel periodo della prova danno per t, ed m'' quegli altri che danno in esso per y de' valori che rendono intere u, e v'; chiamo dippiù n' il numero de' termini del periodo delle prove corrispondente all'espressione u, ed n'' il numero de' termini di quello corrispondente all'altra v', e finalmente con k'', k' due numeri interi qualunque, ed avrò

$m', m'+n', m'+2n', m'+3n', m'+4n', \ldots m'+k'n'$

$m'', m''+n'', m''+2n'', m''+3n'', m''+4n'', \ldots m''+k''n''$

per le serie di tutti i valori di m, che possono soddisfare alla nostra condizione. Onde fatto $m'+k'n' = m''+k''n''$, avremo $k'n'-k''n'' = m''-m'$; equazione indeterminata di cui ne sappiamo trovare (l. 404... 407) i valori di k', k'', e quindi sappiamo quali ed in quali de' periodi sono i valori di t, y che risolvono la proposta.

255. Veniamo ormai ad applicar tuttocciò, che abbiam detto in generale, all' equazione finale del problema in questione. Paragono la proposta generale (A) con questa equazione finale $x^2+xx'+x'^2-144o'^2=0$, e ne avrò $u=x, v'=x', A=1=B'=C, D=E=0$,

$F=-144o'^2$ e però la $(B) \ldots 2x+x' =$
$\sqrt{(4.144o'^2-3x'^2)}$. Quindi senza ricorrere alla (C) abbiamo da risolvere l' equazione

$4.144o'^2-3x'^2 = z^2$ della nota forma $B+lz^2=Q$. Per venirne a capo osservo che questa equazione entra nel caso del numero (l. 425). Quindi senza dover ricorrere a tutte le operazioni che veniamo di notare nel metodo generale, passo a di-

viderla per x'^2 onde averne $\frac{4\cdot144o'^2}{x'^2}=z^2:x'^2+3$,

epperò $\frac{24o'}{x'}=\sqrt{(\frac{z^2}{x'^2}+3)}=(I.418)\pm\frac{A^2+3a^2}{2Aa}$

Dunque $x'=\frac{48Aao'}{A^2+3a^2}$, e $\frac{z}{x'}=\frac{A^2-3a^2}{2Aa}$. Quindi la

(*B*) ci viene a dare $2x+x'=x'.\frac{A^2-3a^2}{2Aa}$: donde

$$x=\frac{12o'(A^2-2Aa-3a^2)}{A^2+3a^2}.$$

256. Queste espressioni di x, x', che si presentano sotto forma frazionaria possono rendersi intere mercè l'opportuna determinazione dell'indeterminata o'. Infatti se noi facciamo

$o=\frac{A^2+9a^2}{12}$, ne avremo $x=A^2-2Aa+3a^2$

ed $x'=4Aa$. La notizia enunciata che le pitture x, x' di ciascuna scuola erano tra 80 e 100, ci gui-

da a fare le indeterminate $A=12$, $a=2$, onde avere $x=84$, $x'=96$, $o=13$, e quindi risponde-re al caso proposto nel problema in questione col dire che 7056 zech. fu il prezzo offerto alle 84 pitture della prima scuola; che 9216 zech. quello alle 96 della seconda; che 8064 zech. quello alla Musa; e che 169 era il numero degli zech. contenuto in ciascun piano della cassetta enunciata.

PROB. 52.

Nello scavo di certi fondamenti s'incontrò un pavimento antico di ambrogette quadre. Quella di mezzo era rossa; intorno a lei ne erano disposte quattro ordini tra verdi, bianche, gialle, e turchine; col prodotto di tre ordini tra rossi, verdi, e bianchi in quattro ordini di turchine e gialle terminava il pavimento. Sene volle ornare una sala quadrata; ma essendo troppe ne fu escluso il prodotto di un ordine di turchine in uno di verdi, ed in uno di gialle. Si sa che ogni ordine conteneva un egual numero di ambrogette; ditemi quante ne erano in ciascun ordine, quante sene trovarono nel pavimento antico, e quante ne furono impiegate nella Sala.

257. Chiamo x l'egual numero delle ambrogette contenuto in ciascun ordine, ed ho $4x$ per

quello de'quattro ordini che nell'antico pavimento si trovarono disposti attorno della rossa situata nel mezzo, e $12x^2$, pel prodotto de' tre o dini tra rosse, verdi, e bianche ne' quattro tra turchine e gialle, in cui detto pavimento terminava. Quindi ho in $1+4x+12x^2$ la somma totale delle ambrogette trovate; somma da cui levato il prodotto x^3 de' tre ordini turchino, verde, e giallo, sene ha $1+4x+12x^2-x^3$ per quello impiegato nella sala enunciata. Quindi chiamato y il numero delle ambrogette di ciascun lato della sala avremo $y^2=1+4x+12x^2-x^3$ epperò $y=\sqrt{(1+4x+12x^2-x^3)}$ Si tratta di rendere un quadrato perfetto la quantità $1+4x+12x^2-x^3$ Sia Q questo quadrato è si avrà l' equazione $1+4x+12x^2-x^3=Q$. Questa equazione entra nel caso generale considerato e risoluto al numero 440 delle lezioni. Quindi facendo le opportune sostituzioni nelle formule ivi registrate si troverà $x=8$. Conoscendo uno de'valori di x che adempiano le condizioni proposte, sene tro-

vano col suo mezzo tutti gli altri infiniti che vi soddisfanno egualmente. Al numero 451 delle lezioni si trova in dettaglio la maniera generale onde riuscirvi. Quindi applicando la stessa al caso di cui si tratta, faccio $x = x' + 8$, ed ho

$$1 + 4x + 12x^2 - x^3 = (17)^2 + 4x' - 12x'^2 - x'^3$$

e perciò l'equazione $(17)^2 + 4x' - 12x'^2 - x'^3 = Q'$ che entra del pari nel caso generale del citato numero 440 delle lezioni. Quindi ho

$x' = \frac{3464}{289} = 11,986$. Similmente facendo

$x = x'' + \frac{3464}{289}$, si avrà per x'' un altro valore che soddisfa egualmente all' equazione proposta. E così di seguito. Or si rifletta che nell' enunciazione non si trova una condizione espressa che il numero delle ambrogette trovato in ciascun ordine del pavimento sia stato intero. Quando le dimenzioni delle ambrogette non sono parti aliquote di quelle del pavimento cui sono impiegate a coprire, un tal numero risulta e s' impiega sempre con fratto. Ciò si osserva sovente nella

pratica de' pavimenti. Quindi tutti i valori che si trovano per x co' metodi indicati sieno interi, sieno fratti, adempiono egualmente le condizioni del problema enunciato. Quindi trovati i valori di x si risponde prontamente con essi alle altre rispettive domande in esso comprese. Quindi nulla restandoci per compimento non solo dello sviluppo di questo problema, ma di tutte le ricerche ancora in cui gli altri proposti al fine dell'Algebra delle lezioni hanno potuto impegnarci. Quindi finito il dettaglio delle teorie sopra i punti diversi di analisi elementare che gli enunciati di tali problemi hanno dato principio, e di cui non mi sono servito che come una specie d'iniziazione, d'introduzione onde dare alle stesse un ordine ed un' applicazione. Quindi compita quella specie di commentario che in una maniera secondaria e quasi accidentale ne risulta a perfezione dell' Algebra delle lezioni. Quindi io ripeto per fine essendo ciò pienamente eseguito, passo allo sviluppo de' problemi proposti al fine della Geometria delle medesime che formando il soggetto della seguente lezione, servirà in generale per uso dell'analisi, e per esercizio della gioventù ne' problemi geometrici, e in particolare per supplemento di quella geometria, ed agevolazione de' giovani nello studio di essa.

Soluzione de' 28 problemi proposti al fine della Geometria.

PROB. 1.

D*Ati (Fig. 1) gli angoli contigui e contrariamente posti EBC* $= a$, *BCD* $= b$, *CDH* $= c$ *ec. trovar l'espressione dell'angolo fatto sull'ultimo lato CD, o DH, o ec da FN normale al lato BE del primo.*

258. Per calcolare una formula generale, onde esprimere l'angolo in questione, ricorro all'analogia de' casi particolari. Incomincio adunque a supporre che sia dato soltanto l'angolo $EBC = a$, onde avrò prontamente l'espressione cercata di $BIF = 90° - a$ o di $BIN = 90° + a$. Passo quindi a considerare il caso in cui gli angoli dati sieno i due $EBC = a$, $BCD = b$; e ne avrò l'espressione corrispondente di $CxI = 180° - b - 90° + a = 90° + a - b$ o di $CxN = 90° - a + b$. Vengo ancora ad osservare che essendo i tre $EBC = a$, $BCD = b$, $CDH = c$ gli angoli dati, sarà l'espressione domandata di $Dx'c = 180° - c - CxI = 90° - a + b - c$, o di $Dx'N = 90° + a - b + c$; e così di seguito. Quindi chiamando in generale n il numero degli angoli dati contigui e contrariamente posti, u l'ultimo di essi, m l'espressione cercata, cioè dell'angolo for-

mato sull' ultimo lato di questo dalla normale tirata al primo lato del primo a se guarda la parte superiore della figura ed m' se ne guarda la parte inferiore, noi ne avremo la tavola de'

Valori di m	Valori di m'
$90^\circ - a$	$90^\circ + a$
$90^\circ + a - b$	$90^\circ - a + b$
$90^\circ - a + b - c$	$90^\circ + a - b + c$
. . . . . .	. . . . .
$90^\circ \pm a \mp b \pm c \ldots - u$	$90^\circ \mp a \pm b \mp c \ldots + u$

Il segno superiore corrisponde ad n pari, e l' inferiore ad n impari. Quindi facendo riflettere ed osservare che quest' analisi ha luogo per qualunque siesi altra figura, in quanto la diversità nella grandezza degli angoli dati non può punto diversificare l' incontro de' loro lati colla normale in questione, noi passiamo al dettaglio del problema seguente.

PROB. 2.

Supposto (Fig 1) *ora che FN si pieghi in I per IP, e si accosti ad IO normale sopra BC, e poi di nuovo per PP' e si scosti da PR normale sopra CD, e così continui a scostarsi per un numero qualunque di angoli. Determinare in qual caso sarà PP' sopra o sotto la normale PR, e l' angolo che saranno fra*

loro le due FN, PP'. Si osservi che oltre gli angoli dati a, b, c, *ec. come nel passato problema si suppongono anche dati gli angoli PIO = r', P'PR = r'', ec.*

259. Nell' enunciazione di questo problema non si propone che lo sviluppo della parte geometrica di una questione di fisica sulle lenti acromatiche (*Fis. Matem Cannovai e del Ricco* 599.). In tal questione gli angoli dati non sono che due solamente, e non visi tratta che di trovare la posizione della normale enunciata *PR* rapporto alla nota retta *PP'*, e ciò nell'angolo contiguo a quello dato, in cui la *FN* si è piegata con accostarsi alla normale *IO* L'autore delle lezioni intanto viene a generalizzarla, e non ce la enuncia che ne' termini più generali di cui essa è capace. Detto autore vuole che si determini la notata posizione di quella normale qualunque sia il numero e la quantità degli angoli dati. Quindi avviene che gli angoli dati possono esistere in una maniera qualunque rapporto a' corrispondenti angoli $P^{(n+1)}\ P^{(n)}\ R^{(n)}$; possono esserne cioè tutti maggiori o tutti minori, oppure maggiori e minori a vicenda. Noi esamineremo la questione sotto questa veduta di generalità, onde soddisfare alle mire dell' autore delle lezioni, e rilevare nel tempo stesso l' errore, che se non

m' inganno, si trova nella risposta che esso cene ha dato.

250. La determinazione degli angoli DPP', $HP'P''$, $LP''P'''$ ec. $>$, o $< 90°$, dipendenti dallo stato relativo degli angoli dati co' corrispondenti $r^{(n)}$, è chiaro che ci farà conoscere prontamente la posizione cercata di $P^{(n-2)} P^{(n-1)}$ rapporto alla corrispondente $P^{(n-2)} R^{(n-2)}$. Quindi andiamo con questa mira a quella determinazione, ed incominciamo ad osservare

I. Che FN essendo per condizione normale sopra BE, fa che IP si trovi sempre nello spazio angolare CIO, qualunque sia b rapporto ad r'. Quindi abbiamo in tutti i casi

$PIO(=r') = 90° - PIC = b + DPZ - 90°$: donde

$r' - b = DPZ - 90°$. Questa equazione, che racchiude la relazione fra le quantità date e cercate, c' insegna che essendo

$b > r'$ si ha $DPZ < 90°$. Quin. PZ e però PP' sotto PR

$b < r'$ si ha $DPZ > 90°$ Quin. PZ e però PP' sopra PR

II. Che potendo PP' trovarsi entro o fuori lo spazio angolare DPR, possiamo avere

$P'PR(=r'') = \pm 90° \mp P'PD = \pm c \pm Z'P'H \mp 90°$: onde

$r'' \mp c = \pm(Z'P'H - 90°)$ Questa equazione ci con-

vinge col segno superiore che

$b > r'$ può incontrarsi con

$c > r''$, che dà $Z'P'H < 90°$. Quindi $P'Z'$

e però $P'P''$ sopra $P'R'$

$c < r''$, che dà $Z'P'H > 90°$. Quindi $P'Z'$

e però $P'P''$ sotto $P'R'$

e col segno inferiore che $b < r'$ può incontrarsi con $c >$, o $< r''$, che dà sempre

$Z'P'H < 90°$; cioè $P'Z'$ e però $P'P''$ sopra $P'R'$.

III. Che $P'P''$ può essere entro o fuori lo spazio angolare $HP'R'$, e perciò può essere

$P''P'R (= r''') = \pm 90° \mp HP'P'' = \pm d \pm LP''Z'' \mp 90°$: donde $r''' \mp d = \pm LP''Z'' - 90°$). Questa equazione ci dimostra col segno superiore, cioè quando $P'P''$ è sopra $P'R'$, epperò (II) quando con

$b > r'$, $c > r''$, ovvero quando con

$b < r'$, e $c >$, o $< r''$ si ha

$d > r'''$, che $LP''Z'' < 90°$. Quindi $P''Z''$,

epperò $P''P'''$ sotto $P''R''$

$d < r'''$, che $LP''Z'' > 90°$. Quindi $P''Z''$

epperò $P''P'''$ sopra $P''R''$

e col segno inferiore, cioè quando $P'P''$ è sotto $P'R'$, epperò (II) quando con

$b > r'$, $c < r''$ si ha $d >$, o $< r'''$, che è sempre

$LP''Z'' < 90°$. Quindi $P''Z''$ epperò $P''P'''$ sotto $P''R''$.

IV. Che $P''P'''$ può eſſere entro o fuori lo ſpazio angolare $LP''R''$ ec. ec.

Quindi raccogliendo poſſiamo conchiudere che ſe due ſono gli angoli dati, avremo PP' ſopra o ſotto PR ſecondo che $b <$, o $> r'$; che ſe tre ſono gli angoli dati, ſarà $P'P''$ ſopra o ſotto $P'R'$ ſecondo che con $b > r'$ ſarà $c >$, o $< r''$; che ſe quattro ſono gli angoli dati ſi avrà $P''P'''$ ſotto o ſopra $P''R''$ ſecondo che con $b > r'$, $c > r''$ ſarà $d >$, o $< r'''$ ovvero ſecondo che con $b < r'$ ſarà $d >$, o $< r'''$ qualunque ſia c verſo r'', ovvero ne ſarà ſempre al di ſotto quando con $b > r'$, $c < r''$ ſi avrà $d >$, o $< r''''$ che ſe cinque ſaranno gli angoli dati, ſi troverà $P'''P''''$ ec. ec. Quindi io dico che il dotto autore delle lezioni col dire „ che eſſendo tre gli angoli dati ſarà $P'P''$ ſopra o ſotto $P'R'$ ſecondo che $c >$, o $< r''$ „ ſenza avere in conſiderazione lo ſtato relativo di b con r', mi ſembra che ſia caduto in inganno, ſe pure non mi ſono io ingannato ne' raziocinj pe' quali ho paſſato. Tanto baſta per riſpondere alla prima parte della propoſta enunciazione. Veniamo adunque alla ſeconda; a trovare cioè l'eſpreſſione dell'angolo formato dall' incontro della FN col prolungamento di una qualunque delle $P^{(n-2)}R^{(n-2)}$.

262 L'espressione di cui si tratta facilmente si ottiene con un metodo regolare e simetrico da' triangoli Phx, $P'h'x'$, $P''h''x''$, ec. In effetto abbiamo

$$\text{Ang. } Phx = 180^\circ - Pxh - DPP' = CxI - 90^\circ \pm r''$$
$$= 90^\circ - b - BIF \pm r'' = a - b \pm r''.$$

$$\text{Ang. } P'h'x' = 180^\circ - P'x'h' - DP'P'' = CxI + c - 90^\circ$$
$$\pm r''' = a - b + c \pm r'''$$

$$\text{Ang. } P''h''x'' = 180^\circ - P''x''h'' - LP''P'''$$
$$= Hx''x' - 90^\circ \pm r'''' = 90^\circ - d - P'x'h' \pm r''''$$
$$= a - b + c - d \pm r''''$$

ec.

Questi tre casi particolari sono bastanti onde mostrarci la legge costante con cui procedono l' espressioni degli angoli in questione, e farci conchiudere in generale, che stando alle denominazioni del problema precedente, si ha

$$P^{(n-2)}h^{(n-2)}x^{(n-2)} = a - b + c - d + \ldots - \ldots \pm r^{(n)}$$

conclusione generale in cui il segno superiore appartiene al caso che $P^{(n-2)}P^{(n-1)}$ è sotto $P^{(n-2)}R^{(n-2)}$, e l'inferiore a quello in cui ne è sopra. Tanto basta onde soddisfar con vantaggio a'proposti quesiti, e venire pertanto al soggetto del problema seguente.

PROB 3.

Condotte (Fig 21) sù i lati **CG, GD** *di un angolo* **G** $= a$ *le normali* **CF, DF** *e la retta* **CD** *che fa con esse gli angoli* **DCF** $= r$, **CDF** $= i$, *supponendo conosciuti gli angoli* a, r, *trovare in tutti i casi l'espressione dell'angolo* i.

263. Niente più facile che rispondere alla proposta enunciazione. Infatti dalla sola ispezione della figura facilmente rilevasi che $i = a \pm r$ secondo che **CD** è sotto o sopra **CF**, e facilmente da questa espressione deduconsi i casi diversi che l'autore delle lezioni ci distingue: casi che io espongo quì sotto in un quadro ragionato onde rilevarsi la rettificazione che mi sembra meritare la risposta di questo autore.

CD sotto **CF** ci dà $i = a + r$, qualunque sia a rapporto ad r, e non quando $a > r$ solamente, come dice l'autore delle lezioni.

CD sopra **CF** ci dà $i = a - r$, che non avendo riguardo al suo segno, ma alla sua sola quantità, può scriversi $i = a \backsim r$, onde racchiudere i due casi di $a > r$, ed $a < r$; nel 2°. de' quali **DF** è anche sopra **CD**, locchè indica il segno negativo.

CD confusa con **CF** ci dà $r = 0$, e però $i = a$.

CD sotto **CF** con $a = r$ ci dà $i = 2a$, e sopra, ci dà $i = 0$, cioè **DF** combaciante con **CD**.

PROB. 4.

Condotte nell'angolo stesso G $=$ *a due altre normali* $C'F'$, $D'F'$ *con un'altra retta* $C'D'$ *onde si abbiano gli angoli* $DCF = p$, $D'C'F' = u$, $CDF = g$, $C'D'F' = h$, *supponendo* p, u *dalla parte medesima delle loro normali*, $g+h$ *un angolo assai grande*, $p-u$ *un angolo piccolissimo*, *e* $p > u$, *determinare i casi in cui sarà* g *maggiore o minore di* h, *e la ragion degli angoli* $p-u$, *e* $\pm h \mp g$.

264. Dovendo gli angoli p, u, e però le rette $CD, C'D'$ trovarsi per condizione dalla parte medesima delle normali CF, $E'F'$ è chiaro che possono incontrarsi soli due casi nella posizione relativa di queste rette e queste normali, cioè le prime non possono trovarsi che tutte due sopra o tutte due sotto delle seconde. Quindi si tratta di determinare in questi due casi la relazione degli angoli g, h, mercè la cognizione di a, p, u. Quindi fa duopo distinguere in questi due casi le 9 combinazioni che possono darsi nello stato relativo di questi tre angoli, cioè

$a > p$, $a > u$ . . . $a = p$, $a > u$ . . . $a < p$, $a > u$
$a > p$, $a = u$ . . . $a = p$, $a = u$ . . . $a < p$, $a = u$
$a > p$, $a < u$ . . . $a = p$, $a < u$ . . . $a < p$, $a < u$

Esaminiamo queste combinazioni, a veggiamo le conclusioni che se ne possono cavare.

265. Nell'enunciazione di cui si tratta osservo due condizioni sotto cui si debbono determinare le ivi indicate relazioni; cioè $p > u$, e $p - u$ picciolissimo. Osservo inoltre che alcune delle notate combinazioni sono contrarie a queste condizioni. Infatti la seconda, la terza e la sesta si oppongono alla prima di esse, perchè danno $p < u$; la quinta e l'ultima si contrastano colla seconda di esse perchè l'una ci dà $p - u = 0$, e l'altra $p - u$ maggiore di una quantità indeterminata. Quindi debbono escludersi dalle nostre considerazioni. Quindi la prima, e la nona che non si oppongono alle due notate condizioni, la quarta e l'ottava che senza opporsi alla seconda di esse guidano per necessità alla prima, formano il soggetto di queste nostre considerazioni; sono i quattro casi cioè in cui si debbono determinare le domandate relazioni fra g ed h, $p - u$, e $\pm h \mp g$.

266. Riesce assai facile lo rilevare dalla sola ispezione della Figura che $g = a \pm p$, ed $h = a \pm u$ secondo che le rette CD, $C'D'$ sono al di quà o al di là delle normali CF, $C'F'$. Quindi CD, $C'D'$ al di quà di CF, $C'F'$ ci danno $g = a + p$, $h = a + u$: e però in tutte le quattro da noi notate combinazioni ci guidano a $g > h$, ed a $p - u = g - h$ CD, $C'D'$ al di là di CF, $C'F'$ ci danno

$g = a - p$, $h = a - u$, e però in tutte le quattro combinazioni ci guidano a $g < h$, colla distinzione che nella quarta diviene $g = 0$, h positiva; nell'ottava g negativa, ed $h = 0$; nella prima g, h positive; nella nona negative; e ci guidano ancora a $p - u = h - g$.

Quindi avvertendo che la variazione de' segni di g, h non tende che a determinarne la posizione, rispetto a CD, $C'D'$ e però quella delle normali DF, $D'F'$, cioè che non vanno se non a rettificare la posizione che le abbiam dato nella figura a seconda de' casi diversi che si possono dare; avvertendo dippiù di paragonare le conseguenze de' miei ragionamenti col risultato dell'autore delle lezioni, onde convingersi della correzione che ad esso conviene, passo al problema che siegue.

PROB. 5.

Condotte da un punto qualunque di un triangolo equilatero tre normali a' tre lati, assegnar la ragione della lor somma alla normale che dal vertice del triangolo và alla base.

267. Sia ACB (*Fig.*3) il triangolo in questione; *e* un punto preso ad arbitrio nella sua superficie; *en*, *em*, *eu* le tre normali tirate a' suoi lati; ed *ea*, *eb*, ec. le rette che dagli angoli van-

no a quel punto. Con tale costruzione abbiamo il triangolo enunciato diviso ne' triangoli AeB, BeC, AeC, e però chiamandone S la superficie sua, abbiamo $S = \frac{Ch.AB}{2} = \frac{(em+eu+en)AB}{2}$: donde $Ch = em+eu+en$: donde si conchiude essere l'ugualtà la domandata ragione.

268. Il principio della similitudine de' triangoli ci guida ancora alla medesima conclusione, ma in una maniera tutta diversa. Infatti sia $AB = 2a$, $Ch = b$, $Am = x$, $me = y$, e però $Bm = 2a-x$, e si avrà dalla somiglianza de' triangoli

$$ChB, Bmi \ldots mi = \frac{b(2a-x)}{a};$$

$$Amo, AhC \ldots mo = \frac{bx}{a}: \text{ donde}$$

$$oi = \frac{2b(a-x)}{a};\ oe = \frac{bx}{a} - y;\ \text{ed } ei = \frac{b(2a-x)}{a} - y.$$

Quindi si avrà da' triangoli simili

$$eno, ACh \ldots ne = \frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}y;\ \text{e da' triangoli}$$

cui, $BhC \therefore eu = \frac{b}{2a}(2a-x) - \frac{1}{2}y$: donde

$me + ne + eu = b = Ch$.

269 Se il triangolo enunciato oltre di essere equilatero fosse rettangolo, e se ne domandassero le condizioni, onde la ragione di ugualtà si verificasse tra il perimetro e la sua superficie; allora avremmo da risolvere l'equazione

$x+y+\sqrt{(x^2+y^2)} = \frac{1}{2}xy$, onde determinare tali condizioni: equazione indeterminata in cui x, y rappresentano i cateti del triangolo in questione: equazione che risoluta per x ci dà

$x = \frac{4y-8}{y-4} = 4 + \frac{8}{y-4}$: equazione che con questo risultato, e colla condizione implicita alla questione di dover essere x, y interi e positivi c'insegna che $y-4$ non può esser maggiore di 8, e però $y > 12$; che fra tutti i valori di y non vi possono soddisfare che i soli quattro $y = 5 = 6 = 8 = 12$; che i valori estremi danno $x = 12 = 5$, e perciò lo stesso triangolo, come i medj che ne danno ancora un solo: equazione

finalmente che ci fa conchiudere di essere due solamente le soluzioni di cui è capace la questione enunciata.

PROB. 6.

Descritti tre quadrati su i lati di un triangolo qualunque e congiunte le loro estremità con linee rette, e di nuovo sopra queste descritti tre altri quadrati, e unite con tre rette le quattro estremità corrispondenti di ciascuna lor coppia, assegnar la ragione del dato triangolo a ciascun de' nove che ne risulteranno.

270. Eseguita (Fig.4.) la costruzione indicata nell'enunciazione proposta. Formata la citata figura, niente riesce più facile che di assegnar ragione colla sola sua ispezione su quanto viene quì appresso.

bd, cm'' normale sopra ac, e sul prolung. di ab
$b'm$, $c'm^{v}$ normali su i prolung. di ac', ab'
$b''m^{iv}$, $a''m'''$ normali su i prolung. di $a''c$, $b''c$
$a'm''$, $c''r$ normali sopra bc'', $a'b$
$c'n$, $c'''n^{v}$ norm. sul prolu. di ambe le parti di $a'b'$
$a'''n'''$, $a^{iv}n^{iv}$ norm. sul prol di ambe le parti di $c'b''$
$b'''n''$, $b^{iv}n'$ norm. sul prolu. di ambe le parti di $a''c''$

$amb' = abd$, $\quad b'm = bd$, $\quad ab'c' = \frac{b'm\,a\,c'}{2} \quad = \quad abc$

$b''cm'''' = acm'$, $\quad b''m'''' = am'$, $\quad a''b'c = \frac{b''m''''\;a''c}{2} \quad = \quad abc$

$bc''r = bcm''$, $\quad c''r = cm''$, $\quad a'bc'' = \frac{c''r\cdot a'b}{2} \quad = \quad abc$

$a'c''''n = a'c''r$, $\quad c''''n = c''r$, $\quad a'b'c'''' = \frac{c''''n\;a'b'}{2} = a'bc'' = abc$

$b'c'''n^{v} = b'c'm^{v}$, $\quad c'''n^{v} = c'm^{v}$, $\quad a'b'c''' = \frac{c'''n^{v}\;a'b'}{2} = ab'c' = abc$

$a^{''''}c^{'}n^{''''} = b^{'}c^{'}m$, $\quad a^{''''}n^{''''} = b^{'}n$, $\quad a^{''''}b^{''}c^{'} = \frac{a^{''''}n^{''''}b^{''}c^{'}}{2} = a^{'}c^{'} = abc$

$a^{''}b^{''}m^{'''} = a^{'''}b^{''}n^{'''}$, $\quad a^{''}m^{'''} = a^{'''}n^{'''}$, $\quad a^{'''}b^{'}c^{'} = \frac{a^{'''}n^{'''}b^{''}c^{'}}{2} = a^{'}b^{''}c = abc$

$a^{''}b^{''}m^{''''} = a^{''}b^{'''}n^{''}$, $\quad b^{''}m^{''''} = b^{'''}n^{''}$, $\quad a^{''}b^{'''}c^{'} = \frac{b^{'''}n^{''}a^{''}c^{''}}{2} = a^{''}b^{''}c = abc$

$b^{''''}c^{''}n^{'} = a^{'}c^{''}m^{''}$, $\quad b^{''''}n^{'} = a^{'}m^{''}$, $\quad a^{''}b^{''''}c^{''} = \frac{b^{''''}n^{'}a^{''}c^{''}}{2} = a^{'}bc^{''} = abc$

PROB. 7.

Data l' altezza a *di un triangolo, e la differenza* b, c, *de' lati e de' ſegmenti della baſe, trovare il triangolo.*

271. Per non aggiungere (Fig.3.) una nuova figura mi ſervo della citata ſupponendo però non eſſere equilatero il triangolo in queſtione. Quindi paſſo a far

$Ah = x$, $Ch = a$, $AC \backsim BC = b$, $Ah \backsim Bh = c$, ed avrò

$BC^2 = a^2 + Bh^2 = a^2 + (c \mp x)^2 = a^2 + c^2 \mp 2cx + x^2$ e

però $AC^2 \; (= a^2 + x^2) = (b \pm BC)^2$

$= b^2 \pm 2b\sqrt{(a^2 + c^2 \mp 2cx + x^2)} + a^2 + c^2 \mp 2cx + x^2$

donde ſene ottiene

$c^2 \mp 2cx + b^2 = \mp 2b\sqrt{(a^2 + c^2 \mp 2cx + x^2)}$. Quadrando queſta eſpreſſione, e quindi riducendo ſene avrà

$$x^2 \mp cx = \frac{b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 4a^2b^2}{4(b^2 - c^2)};$$ donde

$$x \mp \frac{1}{2}c = \pm \frac{1}{2}b\sqrt{\left(\frac{4a^2 + c^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right)},$$ in cui il ſegno

ſuperiore nel primo membro compete al caſo che x è il maggiore de' due ſegmenti, e l' inferiore a

quello che ne è il minore. Colla cognizione quindi di questo segmento, abbiamo

$AC = \surd(a^2+x^2), \mp BC = b \mp \surd(a^2+x^2), \mp Bh = c \mp x$ ed $AB = Ah + Bh$, abbiamo cioè tutte queste parti del triangolo in questione che vi considera la geometria elementare, e perciò la cognizione geometrica di esso; cognizione che formava il soggetto dell' enunciazione proposta.

PROB. 8.

Dato un lato a intorno all' angolo retto di un triangolo rettangolo e l' aggregato b *degli altri due trovar questi lati.*

272. Sia ChB il triangolo di cui si tratta, onde abbiamo $Ch = a$, $BC + Bh = b$, e sia x uno de' lati incogniti. Nella proprietà Pitagorica del triangolo rettangolo io trovo onde prontamente rispondere al quesito proposto, poichè ne ho

$$x^2 = (b-x)^2 \pm a^2; \text{ e quindi } x = \frac{b^2 \pm a^2}{2b}; \text{ quantità}$$

sempre positiva, e di cui il segno superiore corrisponde al caso di x ipotenusa, e ad x cateto l'inferiore. Trovato x si ha tosto in $b-x$ il valore dell' altro, e perciò la risposta a quanto nel problema enunciato si domandava.

PROB. 9.

Determinare la figura contenuta dalle quattro rette che partono dal mezzo di ciascun lato di un quadrilatero, e la sua ragione al quadrilatero.

273. Se (Fig 5.) *ABCD* è il quadrilatero in questione conosciuto, ed *abcd* la figura in questione cercata, noi avremo

$$Aa = \frac{1}{2} AB \ldots Cc = \frac{1}{2} DC$$

$$Ad = \frac{1}{2} AD \ldots Bb = \frac{1}{2} BC$$

e quindi le proporzioni

$$AB : Aa :: AD : Ad$$
$$AB : Ba :: BC : Bb$$
$$CB : Cb :: CD : Cc$$
$$DC : Dc :: DA : Dd$$

le quali ci dicono che *ab*, e *cd*, *ad*, e *bc* sono rispettivamente parallele, e perciò che la figura cercata è un parallelogrammo.

274 Per assegnarne il rapporto col quadrilatero dato, si ricordi che (I.613) due figure simili sono come i quadrati delle loro dimensioni omologhe, e che i triangoli *aBb*, *bCc*, *cDd*, *dAa* essen-

do rispettivamente simili a' triangoli *ABC, BCD*, *ADC, BAD*, ci danno

$$aBb = \frac{1}{4} ABC \ldots bCc = \frac{1}{4} BCD$$

$$cDd = \frac{1}{4} ADC \ldots dAa = \frac{1}{4} ABC$$

e quindi $abcd = ABCD - \frac{1}{4}(ABC + ADC)$

$- \frac{1}{4}(BCD + BAD) = \frac{1}{2} ABCD$: donde si conchiude

che $ABCD : abcd :: 2 : 1$, cioè che la ragione cercata è suddupla.

PROB. 10.

I quadrati de' lati di un parallelogrammo qual ragione hanno a' quadrati delle diagonali.

275. Abbassando (Fig. 8.) sulla base *AD* del parallelogrammo proposto *ABCD* le normali *Bm*, *Cn*, abbiamo (I. 562) $AC^2 = AD^2 + DC^2 + 2AD \cdot Dn$; e $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AD \cdot Am = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot Dn$: donde sene ottiene

$AC^2 + BD^2 = 2(AD^2 + DC^2)$, per conchiuder che la somma de' quadrati delle diagonali eguaglia quella de' quadrati de' lati del dato parallelogrammo, e perciò che la domandata ragione si è l'ugualità.

PROB. 11.

Condotte da un punto E della diagonale AB di un Parallelogrammo HC le normali EF, EI su i lati AH, AC, assegnar la ragione del rettangolo AB . AE a' rettangoli AC . AF + AH . AI.

276. (I. Fig. 23.) Sieno

$$AH = BC = a \ldots AC = BH = b, \ldots AB = c$$
$$AI = x \ldots AF = y \ldots \ldots AE = z$$

epperò

$$EI = \sqrt{(z^2 - x^2)} \ldots EF = \sqrt{(z^2 - y^2)}$$

e si avrà I. coll'abbassare da B sopra AH la normale BD i triangoli simili AIE, ADB, che ci danno

$$AE(z) : EI\left(\sqrt{(z^2 - x^2)}\right) :: AB(c) : BD = \frac{c}{z}\sqrt{(z^2 - x^2)}$$

$$HD = \frac{1}{z}\sqrt{((b^2 - c^2)z^2 + c^2x^2)}; \text{ dippiù}$$

$$AE(z) : AI(x) :: AB(c) : AD(a +$$

$$\frac{1}{z}\sqrt{((b^2 - c^2)z^2 + c^2x^2)} : \text{donde}$$

$x = \frac{(a^2+c^2-b^2)z}{2ac}$; II. coll' abbassare dallo stesso B sopra AC una normale, e col fare un raziocinio affatto simile sul triangolo che ne risulta ed il suo simile corrispondente *AFE*, si avrà $y = \frac{(b^2+c^2-a^2)z}{2bc}$. Quindi $ax+by=cz$, cioè la ragione di cui si tratta è di ugualtà, come nel precedente problema.

PROB. 12.

Prolungati i lati KI, IG di un Parallelogrammo HI, e da un punto qualunque come vertice descritti tre angoli su i lati KI, IG, e sulla diagonale HI condotta per l'angolo contenuto da' lati KI, IG, assegnar la ragione di quelli a questo I. quando il vertice è dentro l'angolo GIA o A'IK: II. quando è dentro l'angolo KIG, o A'Ia': III. quando è in uno de' due lati, o nella diagonale, o nel prolungamento degli uni o dell'altra.

177. La soluzione di questo problema racchiude diversi casi, e ci obbliga alla costruzione di diverse figure. Noi li esamineremo successivamente racchiudendoli tutti in due sole figure.

I. (Fig. 9. n. 1.) Se M ovvero M' è il punto che dee servir di vertice a' triangoli in questione,

avremo secondo che esso è a destra o a sinistra di HG

$$HIM = GIM + GHI \mp GHM = GIM + \frac{1}{2} GH \,.\, nI \mp \frac{1}{2} GH \,.\, aM = GIM + \frac{1}{2} HG(nI \mp aM) =$$

$$GIM + \frac{1}{2} GH \,.\, MA = GIM + IKM;$$

ovvero avremo secondo che esso è sotto o sopra HK

$$HIM' = IKM' + HIK \mp HKM' = IKM' + \frac{1}{2} HK.n'I \mp \frac{1}{2} HK \,.\, A'M' = IKM + \frac{1}{2} HK(n'I \mp$$

$$a'M') = IKM' + \frac{1}{2} HK \,.\, A'M' = IKM' + GIM'$$

II. (Fig. 9 n. 2°) Se M ovvero M' è il punto in cui i triangoli in questione si debbono riunire come vertice avremo secondo che esso è al di quà o al di là di HI

$$HIM = \pm HKM \pm IKM \mp HIK = \pm IKM \pm \frac{1}{2} HK \cdot aM \mp \frac{1}{2} HK \cdot nI = \pm IKM \pm \frac{1}{2} HK \,(aM - nI) = \pm IKM \mp \frac{1}{2} HK \cdot AM =$$

$$\pm IKM \mp GIM$$

ovvero avremo secondo che esso è al di quà o al di là di HI

$$HIM' = \pm HKM' \mp HIK \mp IKM' = \pm \frac{1}{2} M'n'. \; HK \mp \frac{1}{2} In. HK \mp IKM' = \pm \frac{1}{2} HK (M'n' - In) \mp IKM' =$$

$$\mp \frac{1}{2} HK \cdot a'M' \mp IKM' = \pm GIM' \mp IKM'$$

3° In qualunque delle posizioni in cui il punto M dee in questo caso trovarsi, il triangolo poggiato su quello de' due lati o della diagonale in quistione, in cui il punto M si trova, è chiaro che svanisce, e perciò di tre i triangoli del proposto rapporto divengono due, e sono sempre eguali fra loro.

278. Quindi si conchiude che nel primo caso il triangolo sulla diagonale eguaglia la somma, e nel secondo la differenza degli altri due, e che nel terzo caso sono eguali frà loro i due triangoli restanti. Questa conchiusione che formava il soggetto della proposta enunciazione ci permette passare al problema seguente.

PROB. 13.

Descrivere un quadrato in un semicerchio.

279. Chiamato a il raggio del semicerchio enunciato, ed x l'ascissa corrispondente al lato del quadrato, sarà $2(a-x)$ il suo lato. Quindi per la proprietà del cerchio abbiamo

$$y^2 (= 2ax - x^2) = 4a^2 - 8ax + 4x^2 \text{ : donde}$$

$$x = a\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{5}}\right).$$ L' analisi col doppio segno ci

dà in una volta le due ascisse che corrispondono ad ambedue lati del quadrato in questione, normali al diametro del semicerchio proposto. Ecco come l' analisi ci dice alle volte la verità quantunque ci parli con un linguaggio imperfetto, ed ambiguo.

S

PROB. 14.

Il quadrato del lato del trigono regolare iscritto nel cerchio, qual ragione ha al quadrato del raggio?

280. Sappiamo che il lato del trigono regolare divide ed è diviso per metà dal raggio del cerchio in cui è iscritto, e che gli è normale: sappiamo perciò che chiamato a questo raggio, ed y il lato in questione, avremo

$\frac{1}{4}y^2 = \frac{3}{4}a^2$, e perciò $y^2 : a^2 :: 3 : 1$; sappiamo cioè esser tripla la ragione de' quadrati in questione.

PROB. 15.

I quadrati del lato del pentagono, dell'esagono e del decagono regolari iscritti in un circolo qual ragione hanno tra loro?

281. Chiamo P, E, D i lati de' poligoni regolari di cui si tratta, ed a il raggio del cerchio, in cui si suppongono iscritti, ed avrò

(l.542) $E = a$, (l.546) $\frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Dato il lato

del decagono facilmente si trova l'espressione di

P; poichè (l. fig. 38) $CN = \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}P^2)}$,

$NB = a - \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}P^2)}$; donde

$\frac{1}{4}P^2 = D^2 - NB^2 = \frac{1}{4}a^2(\sqrt{5}-1)^2$ -

$(a - \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}P^2)})^2$ e però $P = \frac{1}{2}a\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$.

Quindi abbiamo $P = \frac{1}{2}a\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}, E = a, D =$

$\frac{1}{2}a(\sqrt{5}-1)$, ovvero

$P^2 = \frac{1}{4}a^2(10 - 2\sqrt{5}), E^2 = a^2 - D^2 =$

$\frac{1}{4}a^2(\sqrt{5}-1)^2$: donde sene ottiene

$P^2 = E^2 + D^2$, sene ottiene cioè la risposta domandata che il quadrato del lato del pentagono eguaglia la somma di quelli de' lati degli altri due poligoni in questione.

PROB. 16

Qual ragione hanno tra loro le differenze degli esagoni regolari circoscritto ed iscritto ad un circolo, dell'esagono e trigono iscritti, del trigono ed esagono circoscritti, dell'esagono circoscritto e trigono iscritto?

282. Marcato sempre con a il raggio del cerchio enunciato, e segnati colle lettere iniziali l. E C, l.E.I, l.T.C, l.T I i lati de' poligoni di cui si tratta, si avrà (l.542) l.E.I $= a$, (l.543) l.T $I = a\sqrt{3}$,

e però (l.550) l.E.C. $= \frac{2a}{\sqrt{3}}$, l.T.$C = 2a\sqrt{3}$.

Inoltre se si riflette che la normale abbassata dal centro di qualunque poligono regolare sopra alcuno de' suoi lati eguaglia sempre il raggio del cerchio, quando è circoscritto, ed alla radice quadrata della differenza de' quadrati del raggio del cerchio, quando gli è iscritto, e del suo semilato corrispondente, se si riflette a ciò, avremo (l.604)

$$E.I = \frac{6a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}a^2)}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$T.I = \frac{3a\sqrt{3}\,\sqrt{(a^2 - \frac{3}{4}a^2)}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$E.C. = \frac{12a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2}a = 2a^2\sqrt{3}.$$

$$T.C = \frac{1}{2}a\ 6a\sqrt{3} = 3a^2\sqrt{3}$$

donde le combinazioni enunciate

$$E\ C - E.I = \frac{1}{2}a^2\sqrt{3};\ E.I - T.I = \frac{3}{4}a^2\sqrt{3}$$

$$T.C - E.C = a^2\sqrt{3};\ E.C - T.I = \frac{5}{4}a^2\sqrt{3}.$$

Quindi abbiamo per rispondere al quesito enunciato il progresso de' numeri 2, 3, 4, 5, che formano una progressione Aritmetica: donde conchiudo che la ragione fra la prima e seconda, fra la seconda e la terza, fra la terza e la quarta è continua aritmetica.

PROB. 17.

Qual ragione hanno tra loro tre poligoni regolari di lati m, 2m, m *il primo circoscritto e gli altri due iscritti al Circolo?*

283. Sia come sopra a il raggio del cerchio, cui si riferiscono i poligoni enunciati, e si distinguano ancora colle lettere iniziali i poligoni di cui vi si tratta. Siccome non si vuole che d'assegnare fra questi poligoni il rapporto che hanno solamente fra loro; così posso trovar l'espressione di due di essi in parti del terzo quantunque non conosciuto, onde rispondere a questa domanda. Quindi faccio l.p.i.$m = b$, ed avrò

$$\text{(l.550) l.p.c.}\,m = \frac{2ab}{\surd(4a^2-b^2)} \quad \text{e (l.574) l.p.i.2.}$$

$$= \surd(2a^2 - a\surd(4a^2-b^2)) \text{: donde (l.604)}$$

$$\text{p.c.}m = \frac{a}{2}\,\frac{2abm}{\surd(4a^2-b^2)} = \frac{a^2bm}{\surd(4a^2-b^2)}$$

$$\text{p.i.2}m = 2m\surd(2a^2 - a\surd(4a^2-b^2)) \times$$

$$\frac{1}{2}\surd\left(a^2 - \frac{1}{4}(2a^2 - a\surd(4a^2-b^2))\right) = \frac{1}{2}abm$$

$$\ldots m = \frac{1}{-} bm \surd(a^2 - \frac{1}{4} b^2) = \frac{1}{4} bm \surd(4a^2 - b^2)$$

L... ...i quindi de' poligoni in questione formano il seguito della quantità

a^2, $\frac{1}{2} a \surd(4a^2 - b^2)$, $\frac{1}{4}(4a^2 - b^2)$: seguito in cui il quadrato della media eguaglia il prodotto dell' estreme ; seguito cioè che forma una proporzione geometrica continua ; e che ci dice perciò che la ragione cercata è continua geometrica.

284. Senza ricorrere all'espressioni analitiche della superficie de' tre poligoni, possiamo arrivare la medesima conclusione mercè un semplice raziocinio geometrico. Infatti sappiamo che se dal centro di un poligono regolare si tirano de' raggi a tutti i suoi angoli, si avrà esso diviso in tanti triangoli eguali, quanti sono i suoi lati; sappiamo ancora che se oltre de' detti raggi si tirano del centro medesimo delle normali a' lati di esso, si avrà allora diviso in tanti triangoli quanto è il doppio de' suoi lati; quindi (Fig. 10.) sappiamo che essendo *AE*, *AD* i semilati de' poligoni circoscritto ed iscritto di *m* lati, ed *AF* lato di quello iscritto di 2*m* lati, le superfi-

che de' tre poligoni in questione saranno come i triangoli *CAE*, *CAF*, *CAD*, saranno cioè come le rette *CE*, *CF*, *CD*: quindi sappiamo finalmente per la somiglianza de' triangoli rettangoli *CAD*, *CAE*, che $\div$ *CE* : *CF* : *CD*, cioè che queste tre rette sono in continua ragione geometrica, e perciò che in ragion continua geometrica sono ancora i tre poligoni in questione.

PROB. 18.

Qual ragione hanno tra loro tre poligoni regolari di m, 2m, 2m *lati i primi due circoscritti ed il terzo iscritto al cerchio?*

285. Chiamando a il raggio, e b il lato dell' ultimo de' tre poligoni (Fig. 11.) enunciati, si avrà

(1.550) $\text{l.p.c. } 2m = \frac{2ab}{\sqrt{(4a^2 - b^2)}}$. Inoltre essendo

$AB = \frac{1}{2}$ l.p.c.m, $En = Dn = AD = \frac{1}{2}$l.p.c.$2m$, $an = \frac{1}{2}b$, sarà $CB = \sqrt{(a^2 + \frac{1}{4}\text{l.p.c. } m^2)}$ e però

$Bn = \sqrt{(a^2 + \frac{1}{4}\text{l.p.c } m^2)} - a$. La somiglianza poi de' triangoli *BnD*, *BAC* dandoci *Bn* : *Dn* :: *AB* : *AC*,

ovvero $\sqrt{(a^2 + \frac{1}{4}\text{l.p.c. } m)^2} - a : \frac{ab}{\sqrt{(4a^2 - b^2)}} ::$

$\frac{1}{2}$ l.p.c.m : a, ci dice che l.p.c.$m = \frac{2ab\sqrt{(4a^2 - b^2)}}{2a^2 - b^2}$

Quindi (1.6e4)

$$\text{p.c.}m = \frac{1}{2}AC.\frac{2abm\sqrt{(4a^2 - b^2)}}{2a^2 - b^2} = \frac{a^2\, bm\sqrt{(4a^2 - b^2)}}{2a^2 - b^2}$$

$$\text{p c.}2m = \frac{1}{2}Cn\frac{4abm}{\sqrt{(4a^2 - b^2)}} = \frac{2a^2 bm}{\sqrt{(4a^2 - b^2)}}$$

$$\text{p.i.}2m = \frac{1}{2}aC.2bm = \frac{1}{2}bm\sqrt{(4a^2 - b^2)}$$

Quindi i tre poligoni in questione sono come le quantità

$$\frac{a^2\sqrt{(4a^2 - b^2)}}{2a^2 - b^2},\quad \frac{2a^2}{\sqrt{(4a^2 - b^2)}},\quad \frac{1}{2}\sqrt{(4a^2 - b^2)}$$

T

$$HIM = \pm HKM \pm IKM \mp HIK = \pm IKM \pm \frac{1}{2} HK . aM \mp \frac{1}{2} HK . nI = \pm IKM \pm \frac{1}{2} HK (aM - nI) = \pm IKM \mp \frac{1}{2} HK . AM = \pm IKM \mp GIM$$

ovvero avremo fecondo che eſſo è al di quà o al di là di HI

$$HIM' = \pm HKM' \mp HIK \mp IKM' = \pm \frac{1}{2} M'n' . HK \mp \frac{1}{2} In . HK \mp IKM' = \pm \frac{1}{2} HK (M'n' - In) \mp IKM' = \mp \frac{1}{2} HK . a'M' \mp IKM' = \pm GIM' \mp IKM'$$

3° In qualunque delle poſizioni in cui il punto M dee in queſto caſo trovarſi, il triangolo poggiato ſu quello de' due lati o della diagonale in queſtione, in cui il punto M ſi trova, è chiaro che ſvaniſce, e perciò di tre i triangoli del propoſto rapporto divengono due, e ſono ſempre eguali fra loro,

278. Quindi si conchiude che nel primo caso il triangolo sulla diagonale eguaglia la somma, e nel secondo la differenza degli altri due, e che nel terzo caso sono eguali fra loro i due triangoli restanti. Questa conchiusione che formava il soggetto della proposta enunciazione ci permette passare al problema seguente.

PROB. 13.

Descrivere un quadrato in un semicerchio.

279. Chiamato a il raggio del semicerchio enunciato, ed x l'ascissa corrispondente al lato del quadrato, sarà $2(a-x)$ il suo lato. Quindi per la proprietà del cerchio abbiamo

$y^2 (= 2ax - x^2) = 4a^2 - 8ax + 4x^2$: donde

$x = a\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{5}}\right)$. L' analisi col doppio segno ci

dà in una volta le due ascisse che corrispondono ad ambedue lati del quadrato in questione, normali al diametro del semicerchio proposto. Ecco come l' analisi ci dice alle volte la verità quantunque ci parli con un linguaggio imperfetto, ed ambiguo.

S

PROB. 14.

Il quadrato del lato del trigono regolare iscritto nel cerchio, qual ragione ha al quadrato del raggio?

280. Sappiamo che il lato del trigono regolare divide ed è diviso per metà dal raggio del cerchio in cui è iscritto, e che gli è normale: sappiamo perciò che chiamato a questo raggio, ed y il lato in questione, avremo

$$\frac{1}{4}y^2 = \frac{3}{4}a^2,$$ e perciò $y^2 : a^2 :: 3 : 1$; sappiamo cioè esser tripla la ragione de' quadrati in questione.

PROB. 15.

I quadrati del lato del pentagono, dell'esagono e del decagono regolari iscritti in un circolo qual ragione hanno tra loro?

281. Chiamo P, E, D i lati de' poligoni regolari di cui si tratta, ed a il raggio del cerchio, in cui si suppongono iscritti, ed avrò (l.542) $E = a$, (l.546) $\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$. Dato il lato del decagono facilmente si trova l'espressione di

P; poichè (I. fig. 38) $CN = \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}P^2)}$,

$NB = a - \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}P^2)}$: donde

$\frac{1}{4}P^2 = D^2 - NB^2 = \frac{1}{4}a^2(\sqrt{5}-1)^2 - (a - \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}P^2)})^2$ e però $P = \frac{1}{2}a\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$.

Quindi abbiamo $P = \frac{1}{2}a\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$, $E = a$, $D = \frac{1}{2}a(\sqrt{5}-1)$, ovvero

$P^2 = \frac{1}{4}a^2(10 - 2\sqrt{5})$, $E^2 = a^2 - D^2 = \frac{1}{4}a^2(\sqrt{5}-1)^2$: donde sene ottiene

$P^2 = E^2 + D^2$, sene ottiene cioè la risposta domandata che il quadrato del lato del pentagono eguaglia la somma di quelli de' lati degli altri due poligoni in questione.

PROB. 16

Qual ragione hanno tra loro le differenze degli esagoni regolari circoscritto ed iscritto ad un circolo, dell'esagono e trigono iscritti, del trigono ed esagono circoscritti, dell'esagono circoscritto e trigono iscritto?

282. Marcato sempre con a il raggio del cerchio enunciato, e segnati colle lettere iniziali l. $E\,C$, l.$E\,I$, l.$T\,C$, l.$T\,I$ i lati de' poligoni di cui si tratta, si avrà (l. 542) l.$E.I = a$, (l. 543) l.$T\,I = a\surd 3$,

e però (l. 550) l.$E.C. = \frac{2a}{\surd 3}$, l.$T.C = 2a\surd 3$.

Inoltre se si riflette che la normale abbassata dal centro di qualunque poligono regolare sopra alcuno de' suoi lati eguaglia sempre il raggio del cerchio, quando è circoscritto, ed alla radice quadrata della differenza de' quadrati del raggio del cerchio, quando gli è iscritto, e del suo semilato corrispondente, se si riflette a ciò, avremo (l. 604)

$$E.I = \frac{6a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}a^2)}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$T.I = \frac{3a\sqrt{3}\sqrt{(a^2 - \frac{3}{4}a^2)}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$E.C. = \frac{12a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2}a = 2a^2\sqrt{3}.$$

$$T.C = \frac{1}{2}a \quad 6a\sqrt{3} = 3a^2\sqrt{3}$$

donde le combinazioni enunciate

$$E\ C - E.I = \frac{1}{2}a^2\sqrt{3};\ E.I - T.I = \frac{3}{4}a^2\sqrt{3}$$

$$T.C - E.C = a^2\sqrt{3};\ E.C - T.I = \frac{5}{4}a^2\sqrt{3}.$$

Quindi abbiamo per rispondere al quesito enunciato il progresso de' numeri 2, 3, 4, 5, che formano una progressione Aritmetica: donde conchiudo che la ragione fra la prima e seconda, fra la seconda e la terza, fra la lerza e la quarta è continua a ritmetica.

PROB. 17.

Qual ragione hanno tra loro tre poligoni regolari di lati m, 2m, m *il primo circoscritto e gli altri due iscritti al Circolo?*

283. Sia come sopra a il raggio del cerchio, cui si riferiscono i poligoni enunciati, e si distinguano ancora colle lettere iniziali i poligoni di cui visi tratta. Siccome non si vuole che d'assegnare fra questi poligoni il rapporto che hanno solamente fra loro; così posso trovar l'espressione di due di essi in parti del terzo quantunque non conosciuto, onde rispondere a questa domanda. Quindi faccio l.p.i.$m = b$, ed avrò

$$(l.550)\ \text{l.p.c.}\ m = \frac{2ab}{\sqrt{(4a^2-b^2)}}\ \text{e}(\ l.574)\ \text{l.p.i.2.}$$

$$= \sqrt{(2a^2 - a\sqrt{(4a^2-b^2)})}:\ \text{donde}\ (l.604)$$

$$\text{p.c.}m = \frac{a}{2}\ \frac{2abm}{\sqrt{(4a^2-b^2)}} = \frac{a^2bm}{\sqrt{(4a^2-b^2)}}$$

$$\text{p.i.2}m = 2m\sqrt{(2a^2 - a\sqrt{(4a^2-b^2)})} \times$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}(2a^2 - a\sqrt{(4a^2-b^2)}))} = \frac{1}{2}abm$$

$$\ldots m = \frac{1}{\ldots} bm\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}b^2)} = \frac{1}{4} bm\sqrt{(4a^2 - b^2)}$$

L... ...i quindi de' poligoni in questione forman... il seguito della quantità

a^2, $\frac{1}{2} a\sqrt{(4a^2 - b^2)}$, $\frac{1}{4}(4a^2 - b^2)$: seguito in cui il quadrato della media eguaglia il prodotto dell' estreme; seguito cioè che f...rma una pro... orzione geometrica continua; e che ci dice per... iò che la ragione cercata è continua geometrica.

284. Senza ricorrere all'espressioni analitiche del... superficie de' tre poligoni, possiamo arrivare la medesima conclusione mercè un semplice ra... ocinio geometrico. Infatti sappiamo che se dal ...ntro di un poligono regolare si tirano de' rag... a tutti i suoi angoli, si avrà esso diviso in ...nti triangoli eguali, quanti sono i suoi lati; ...ppiamo ancora che se oltre de' detti raggi si ...rano del centro medesimo delle normali a' lati ...i esso, si avrà allora diviso in tanti triangoli ...anto è il doppio de' suoi lati; quindi (Fig. 10.) ...ppiamo che essendo *AE*, *AD* i semilati de' po... goni circoscritto ed iscritto di *m* lati, ed *AF* lato di quello iscritto di 2*m* lati, le superfi...

vvero $\sqrt{(a^2 + \frac{1}{4}\text{l.p.c. } m)^2} - a : \frac{ab}{\sqrt{(4a^2-b^2)}} ::$

$\frac{1}{2}$ l.p.c.m : a, ci dice che l.p.c.$m = \frac{2ab\sqrt{(4a^2-b^2)}}{2a^2-b^2}$

Quindi (1.604)

$$\text{p.c.}m = \frac{1}{2}AC.\frac{2abm\sqrt{(4a^2-b^2)}}{2a^2-b^2} = \frac{a^2bm\sqrt{(4a^2-b^2)}}{2a^2-b^2}$$

$$\text{p c.}2m = \frac{1}{2}Cn\frac{4abm}{\sqrt{(4a^2-b^2)}} = \frac{2a^2bm}{\sqrt{(4a^2-b^2)}}$$

$$\text{p.i.}2m = \frac{1}{2}aC.2bm = \frac{1}{2}bm\sqrt{(4a^2-b^2)}$$

Quindi i tre poligoni in queſtione ſono come le quantità

$$\frac{a^2\sqrt{(4a^2-b^2)}}{2a^2-b^2},\quad \frac{2a^2}{\sqrt{(4a^2-b^2)}},\quad \frac{1}{2}\sqrt{(4a^2-b^2)}$$

286. Osservo il progresso di queste quantità e mi avveggo che

$$\frac{a^2\sqrt{(4a^2-b^2)}}{2a^2-b^2}\left(\frac{2a^2}{\sqrt{(4a^2-b^2)}}-\frac{1}{2}\sqrt{(4a^2-b^2)}\right)$$

$$=\frac{a^2b^2}{2(2a^2-b^2)}=\text{p.c.}m.(\text{p.c.}2m-\text{p.i.}2m)$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{(4a^2-b^2)}\left(\frac{a^2\sqrt{(4a^2-b^2)}}{2a^2-b^2}-\frac{2a^2}{\sqrt{(4a^2-b^2)}}\right)$$

$$=\frac{a^2b^2}{2(2a^2-b^2)}=\text{p.i.}2m(\text{p.c.}2m-\text{p.c.}m)$$

Quindi p.c.m : p.i.$2m$ :: p.c.$2m$ − p.c.m : p.c.$2m$ − p.i.$2m$, cioè (l.212) che i poligoni di cui si tratta nell' enunciazione sono in ragione armonica continua.

PROB. 19.

Iscritto e circoscritto al cerchio uno stesso poligono regolare, trovare il raggio del cerchio, cui circoscrivendo o iscrivendo un poligono simile il nuovo poligono eguagli la differenza de' dati.

287. Se marchiamo con a, x i raggi del cerchio dato, e del cercato, se chiamiamo b il lato del poligono dato iscritto, e perciò (l.550)

$\frac{2ab}{\sqrt{(4a^2-b^2)}}$ quello del dato circoscritto; se riflettiamo alla condizione che il poligono cercato, dovendo esser simile a' dati, dee averne eguale il numero de' lati e perciò tirando da' loro centri agli angoli loro rispettivi de' raggi, debbono tanto l' uno che gl'altri esserne divisi in uno egual numero di triangoli rispettivamente eguali fra loro; se avvertiamo alla seconda condizione enunciata che il poligono cercato dee eguagliar la differenza de' dati, e perciò che uno qualunque di quei triangoli dee esser la differenza di due presi ne' poligoni dati; se facciamo tuttocciò avremo

$$\text{tr.p.c.} = \frac{1}{2}a.\frac{2ab}{\sqrt{(4a^2-b^2)}} - \frac{1}{2}b.\frac{1}{2}\sqrt{(4a^2-b^2)}$$

$$= \frac{b^3}{4\sqrt{(4a^2-b^2)}}.$$

288. Il principio dimostrato (l.613) che due figure simili sono come i quadrati delle loro di-

menzioni omologhe, ci dà per essere le quantità come le loro parti simili

$$tr.p.d.i.:tr.p.c::\frac{1}{4}b\sqrt{(4a^2-b^2)}:\frac{b^3}{4\sqrt{(4a^2-b^2)}}::a^2:x^2$$

$$tr.p.d.c:tr.p.c::\frac{a^2 b}{\sqrt{(4a^2-b^2)}}:\frac{b^3}{4\sqrt{(4a^2-b^2)}}::a^2:x^2$$

Quindi $x=\frac{ab}{\sqrt{(4a^2-b^2)}}$, $=\frac{1}{2}b$, cioè il cerchio cercato avrà il raggio eguale alla metà del lato del poligono dato.

BROB. 20.

Alzata nel semicerchio ACD *l'ordinata* EB *per cui passi una corda* AC *condotta dall' estremità del diametro, trovar la ragione de' rettangoli* AD. AE, *ed* AC. AH.

289. I triangoli (l.Fig.124.) AEH, ACD oltre l' angolo comune A avendo l'angolo $AEH=ACD$, perchè retti, sono simili. Quindi ci danno $AE:AH::AC:AD$: donde $AD.AE=AC.AH$, e perciò ci dicono che l' ugualta è la ragione cercata.

PROB. 21.

Condotte (l. Fig. 50) *da un punto* M *della circonferenza il cui centro è* C *la tangente* MT *e l' ordinata* MP, *assegnar la ragione delle quattro linee* TA, TP, TC, TB *prese sul diametro dall' origine della tangente.*

290. Essendo CM normale al *MT*, in quanto raggio al punto di contatto *M*, sarà per la somiglianza de' *TMC*, *TPM*, $MT^2 = TC \cdot TP$. Inoltre essendo *TMC*=*AMB* perchè retti, sarà *TMA*=*CMB*=*B*, e però simili i triangoli *TAM*, *TMB*, e però $MT^2 = TB \cdot TA$. Quindi $TB \cdot TA = TC \cdot TP$: donde $TA : TP :: TC : TB$: cioè le linee in questione sono in proporzione geometrica.

Potremo altrimenti arrivare alla conclusione medesima, ma lasciamo che altri vi arrivi mercè l' articolo (l. 564, o 565)

PROB. 22.

Data (Fig. 78.) *l' area* AN=a *ed il solo contorno laterale* ALMNC=c *di una figura, trovare un rettangolo che la eguagli in area, e con tre de' suoi lati anche in contorno.*

291. Sieno *l*, *p* i lati contigui del rettangolo cercato, e sarà *lp* la sua superficie, e $2p+l$ il con-

torno de' suoi tre lati. Quindi le due equazioni di condizione $lp = a$, $2p + l = c$, le quali ci guidano a' risultati

$$p = \frac{c \pm \sqrt{(c^2 - 8a)}}{4},\ l = \frac{4a}{c \pm \sqrt{(c^2 - 8a)}};$$

risultati che con ambedue i segni soddisfanno alle condizioni enunciate.

PROB. 23.

Trovare un circolo eguale alla superficie di un dato cilindro o cono-retto.

292. Con a, r, ed x marco il lato del cilindro o cono-retto enunciato, il raggio del cerchio che gli serve di base, e quello del cerchio cercato; con 1 : c esprimo il rapporto del diametro alla circonferenza, e perciò (l.606) con $2cr$ avrò la espressione della circonferenza della base del solido, con $2acr$ o con acr (l.637.638.) quella della sua superficie, e con cx^2 la superficie del cerchio cercato. Quindi avrò per condizione l'equazione

$cx^2 = 2acr$, o $cx^2 = acr$: donde si ottiene

$x = \sqrt{2ar}$, o $= \sqrt{ar}$; locchè mi dice che un cerchio eguaglierà la superficie di un dato cilindro o cono-retto secondo che il suo raggio sarà me-

dio proporzionale geometrico tral diametro o raggio della sua base e del suo lato.

PROB. 24.

Dato (I.Fig.92) un tronco di cono-retto CD *con le basi* BC, DE *parallele, farvi una sezione HI parallela alle basi in modo che la circonferenza di essa sia media proporzionale Aritmetica tra le circonferenze delle basi.*

294. Il Cono che considera la geometria Elementare è quello spazio compreso tra un piano circolare che gli serve di base, e la superficie generata dal moto di una linea che passa senza interruzione per un punto preso fuori di esso, e che nel rivolgersi tocca tutti i punti della sua circonferenza. La posizione relativa del punto per cui passa la linea generatrice, cioè della sommità colla base del cono, è quella che determina il carattere particolare di esso. Qualunque sia esso, cioè retto o obbliquo, riesce facile (I.624) il rilevare che le sezioni parallele alla base sono sempre circolari, perchè sono delle figure simili ad essa. Quindi andiamo a ragionare considerando il tronco in questione qualunque sia il cono (I. Fig. 92), cui appartiene. Quindi (Fig. 12) rappresentando con *DC* una delle sezioni che passano pel suo asse, ed *HI* quella parallela alle due basi: facen-

do $CE = d$, $EI = x$, $AE = a$, $AC = b$, $DE = c$, $EK = y$, e però $AK = a - y$, avremo dalla somiglianza rispettiva de' triangoli ADE AHK, ed ACE, KIE,

$HK = \frac{ac - cy}{a}$, $KI = \frac{by}{a}$, e però $HK + KI = HI =$

$\frac{ac + (b - c)y}{a}$. Quindi per la condizione enunciata

avremo $\frac{1}{2}(b + c) = \frac{ac + (b - c)y}{a}$: donde $y = \frac{1}{2}a$, e però

da' triangoli simili ACE, KIE, $x = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}EC$;

quindi la questione proposta per un tronco di cono retto ha egualmente luogo per un tronco di cono obbliquo, cioè per un tronco di cono qualunque, purchè le sue basi sieno parallele.

PROB. 25.

Trovare un cerchio eguale alla superficie di un dato segmento sferico.

295 Chiamando a l'altezza del segmento dato, r il raggio della sfera, cui appartiene, x quello del cerchio domandato, ed $1 : c$ il rapporto del diametro alla circonferenza, si avrà (I. 606)

cx^2 per la superficie di questo cerchio ; e (l.640) $2acr$ per quella del segmento. Quindi l'equazione di condizione $cx^2 = 2acr$; equazione che ci dà $x = \sqrt{2ar}$, che ci dice che il raggio del cerchio domandato è medio proporzionale geometrico tra l'altezza del segmento, ed il diametro della sfera, cui esso appartiene.

PROB. 26.

Trovare una sfera eguale in solidità a un dato segmento sferico.

296. Se chiamo come nel precedente problema a, r, ed x l'altezza del segmento dato, il raggio della sfera, cui esso appartiene, ed il raggio della sfera cercata, avrò (l. 652)

$\frac{4cx^3}{3}$ per l'espressione della sua solidità; e

(l.655) $a^2c(r - \frac{1}{3}a)$ quella del segmento; e quindi per condizione avrò l'equazione

$$\frac{4cx^3}{3} = a^2c(r - \frac{1}{3}a) \text{: donde } x = \left(\frac{3a^2r - a^3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$$

PROB. 27.

Dato un cono ed un tronco di cono retti, trovare una sfera eguale alla lor somma.

297. Essendo a, a' le altezze de' coni intero e troncato, r, r', r'' i raggi delle lor basi, ed x il raggio della sfera domandata, sarà (l. 649)

$$S.\ C. = \frac{1}{3} acr^2,\ (l. 650) S.C.T = \frac{a'c}{3\ 4}(r'^2 + r''^2 + r''r'),$$

e (l. 652) $S\ ff. = \frac{4cx^3}{3}$. Quindi per condizione $S.ff = S.C. + S\ C.T$, e perciò

$$\frac{4cx^3}{3} = \frac{acr^2}{3} + \frac{a'c}{3}(r'^2 + r''^2 + r'r'')\text{: donde}$$

$$x = \left(\frac{ar^2 + a'(r'^2 + r''^2 + r'r'')}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$$

PROB. 28.

Data una sfera formarne 1° un cono retto di una data base, o di una data altezza; 2° un tronco di cono retto di due date basi, o di una base ed un' altezza data.

298. Nel primo de' due casi enunciati veggo che si tratta di trovar l' altezza di un cono re-

to di nota base tale che eguagli una data sfera in solidità, o si cerca il raggio della base di questo cono conoscendosene l'altezza: nel secondo si vuole l'altezza del tronco quando se ne conoscono le basi, o il raggio di una base quando sene conosce l'altra e l'altezza; quindi esprimendo con $1 : c$ il rapporto del diametro alla circonferenza, e notando dippiù 1° con r, r', x il raggio della sfera, della base conosciuta del cono, e la sua altezza, si avrà

$$\frac{cr'^2 x}{3} = \frac{4cr^3}{3}$$ ed $x = \frac{4r^3}{r'^2}$, o con a, y l'altezza ed il raggio della base di questo cono, sarà $y = \frac{1}{2} r \sqrt{\frac{r}{a}}$; 2° con r', r'' i raggi delle due basi del tronco, e z la sua altezza, sarà

$$\frac{cz}{3}(r'^2 + r''^2 + r'r'') = \frac{4cr'^3}{3}$$, e però

$$z = \frac{4r^3}{r'^2 + r''^2 + r'r''}$$; o pure con r', x, a, i raggi delle basi, e l'altezza di essa, si avrà

$$\frac{4cr^3}{3} = \frac{ac}{3}(r'^2 + x^2 + r'x), \text{ e però}$$

$$x = -\frac{r'}{2} \pm \left(\frac{4r^3}{a} - \frac{3}{4}r'^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Eccoci al termine de' problemi sulla Geometria Elementare, ed eccoci perciò al principio di quelli che sono stati proposti al fine delle due trigonometrie. Noi andiamo a darne di alcuni la soluzione onde servire di esercizio e di pratica; noi andiamo ad esporne sotto l'enunciazione degli altri quelle teorie che potranno in esse trovare un uso, un' applicazione, un principio.

Teorie esposte sotto l'enunciazione de' Problemi proposti al fine della Trigonometria Rettilinea.

PROB. 1.

Trovare un angolo x *la cui tangente sia* n*pla del suo seno.*

299. LA condizione enunciata mi porta a stabilire l' equazione $\tan x = n \text{ sen } x$: la doppia espression della secante (l. 698...700) mi dà $\frac{\tan x}{\text{sen } x} = \sqrt{(1+\tan^2 x)}$, e però $\tan^2 x = \frac{\text{sen}^2 x}{1-\text{sen}^2 x}$:

la sostituzione finalmente di $n \text{ sen } x$ per $\tan x$ in questa espressione, mi fa trovar

$\text{sen } x = \frac{1}{n}\sqrt{(n^2-1)} = \frac{\sqrt{(n+1)(n-1)}}{n}$, e mi dà la

soluzione perciò del proposto quesito.

PROB. 2.

Dividere un dato angolo a *in due angoli* x, a − x *tali, che i loro seni sieno nella ragione data di* m : n.

300 Abbiamo per condizione

$n \text{ sen } x = m \text{ sen } (a-x) = (\text{l. } 703.\ 2^{o})$

$m(\text{ſen}\, a \cos x - \text{ſen}\, x \cos a)$; ed abbiamo perciò

$$\tan x = \frac{m\, \text{ſen}\, a}{n + m \cos a}.$$

Per preparare queſta formula all' applicazione de' logaritmi, il di cui uſo è indiſpenſabile per dir così in queſti caſi, la metto ſotto la forma

$$\tan x = \frac{m\, \text{ſen}\, a : n}{(1 + m \cos a : n)}$$ Quindi riflettendo che una tangente è ſuſcettibile di tutti i valori, paſſo a ſupporre $m \cos a : n = \tan^2 u$, onde avrò

$\tan x = m\, \text{ſen}\, a \cos^2 u : n$. Il calcolo combinato di queſte due formule riuſcirà per logaritmi aſſai più pronto e ſpedito di quello di $\tan x = \dfrac{m\, \text{ſen}\, a}{n + m \cos a}$.

Chi è per poco iſtruito nel calcolo trigonometrico ne conoſcerà la verità, ed io perciò ſenza trattenermi a metterla in chiaro paſſo al problema ſeguente.

PROB. 3.

Data la differenza d *di due angoli* x, x+d, *la ragione* n : m *de' loro seni, trovare gli angoli*.

301. La condizione unica di questo problema mi dà m sen $x = n$ sen $(x+d)$, cioè (I.703.1°) m sen $x = n$ (sen x cos d + sen d cos x); equazione che divisa per cos x, mi porta al risultato

$$\tan x = \frac{n \operatorname{sen} d}{m - n \cos d}.$$

Per rendervi più commoda l' applicazione de' logaritmi la metto nella forma $\tan x = \frac{\tan d}{m : n \cos d - 1}$

Quindi considero i due casi in cui essa può trovarsi, cioè di $\frac{m}{n \cos d} >, o < 1$: nel primo suppongo $\frac{n. \cos d}{m} = \cos^2 u$ onde avrò $\tan x = \frac{\tan d}{\tan^2 u}$.

e nel secondo suppongo ad arbitrio $\operatorname{sen}^2 u$, o $\cos^2 u = \frac{m}{n \cos d}$ ed avrò

$-\tan x = \frac{\tan d}{\text{sen}^2 u}$, o $= \frac{\tan d}{\cos^2 u}$. La distinzione di questi due casi mi è stata indispensabile, poichè nel secondo si avrebbe colla supposizione del primo $\frac{n \cos d}{\text{sen}^2 u} - 1 = \frac{1}{\cos^2 u} - 1 = \tan^2 u$, cioè si avrebbe $\tan^2 u$ negativo; locchè è un assurdo; e nel primo coll'ipotesi del secondo si sarebbe il seno o coseno > 1, quando ne è sempre minore.

PROB. 4.

Date le ragioni n : 1 *de' seni ed* m : 1 *delle tangenti di due angoli* x, z *trovare gli angoli.*

302. I rapporti dati fra i seni e tangenti degli angoli cercati mi danno le due equazioni $\text{sen}\, x = n\, \text{sen}\, z$, $\tan x = m \tan z$. Per eliminare una delle due incognite in esse contenute, io veggo che essendo $\tan x = \frac{m\, \text{sen}\, z}{\sqrt{(1-\text{sen}^2 z)}}$ e $\text{sen}\, z = \frac{\text{sen}\, x}{n}$, sarà

$\frac{\text{sen}^2 x}{1-\text{sen}^2 x} = \frac{m^2\, \text{sen}^2 x}{n^2 - \text{sen}^2 x}$, cioè $n^2 - \text{sen}^2 x = m^2 -$

m^2 sen$^2 x$, e sen $x = \sqrt{\frac{m^2 - n^2}{m^2 - 1}}$, e quindi

sen $z = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{m^2 - n^2}{m^2 - 1}}$. Se vogliamo gli angoli in questione espressi non pe' loro seni, ma per le loro tangenti, allora avremo cos$x = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{m^2 - 1}}$,

e però tan $x = \sqrt{\frac{m^2 - n^2}{n^2 - 1}}$, e quindi

tan $z = \frac{1}{m}\sqrt{\frac{m^2 - n^2}{n^2 - 1}}$:

Questi risultati non han bisogno di alcuna trasformazione onde essere preparati alla pronta applicazione de' logaritmi, poichè essi non sono che de'composti di prodotti e divisioni.

PROB. 5.

Supposti aritmeticamente proporzionali i seni di tre angoli p, m, u, *determinare quali debbono essere*

gli angoli estremi p, u, *affinchè anche i coseni di tutti e tre sieno nella medesima proporzione.*

303. La proporzione aritmetica in cui i seni e i coseni degli angoli in questione debbonsi singolarmente trovare ci porta a stabilire le due equazioni di condizione sen $m = \frac{1}{2}$(sen p + sen u)

$$\cos m = \frac{1}{2}(\cos p + \cos u)$$

ovvero (I. 709) $\text{sen}\, m = \text{sen}\, \frac{1}{2}(p+u) \cos \frac{1}{2}(p \backsim u)$

$$\cos m = \cos \frac{1}{2}(p+u) \cos \frac{1}{2}(p \backsim u)$$

304. Maneggiando la prima di queste due equazioni io ne cavo il valor di

$\cos m = \sqrt{(1 - \cos^2 \frac{1}{2}(p \backsim u)(1 - \cos^2 \frac{1}{2}(p+u))}$, che messo nella seconda dà $\cos \frac{1}{2}(p+u) \cos \frac{1}{2}(p \backsim u) = \sqrt{(1 - \cos^2 \frac{1}{2}(p \backsim u)(1 - \cos^2 \frac{1}{2}(p+u))}$ cioè ne ho

col $\frac{1}{2}$ $(p \smile u) = 1$, cioè $p \smile u = 0$. Quindi riguardando il zero non come il niente che non ha alcuna esistenza, e di cui noi non abbiamo alcuna idea positiva, ma bensì come il limite delle grandezze che continuamente decrescono; e riflettendo che la grandezza ed il limite possono indistintamente prendersi l'una per l'altro, quando differiscon fra loro di una quantità minore di qualunque quantità assegnabile, ne avviene che io conchiuda rispondendo all'enunciazione proposta che allora i seni e i coseni degli angoli in questione saranno rispettivamente in proporzione aritmetica, quando gli angoli estremi differiscon fra loro di una quantità assegnabile, che più in laconico diciam picciolissima.

PROB. 6.

Data l'equazione $\frac{(n-N) \text{ sen } p}{(n+N) \text{ sen } u} = 1$, *ove* n, N *son note*, *e sen* m *è medio proporzionale aritmetico tra sen* p *e sen* u, *trovar l'angolo* p − u *che si suppone picciolissimo*.

305. L'equazione enunciata ci dà sen p : sen u :: $n+N$: $n-N$, ovvero sen p + sen u : sen p − sen u ::

$n : N$. Quindi sene ottiene (l.709) n sen $\frac{1}{2}(p-u)$ cos $\frac{1}{2}(p+u) = \frac{1}{2} N$ (sen p + sen u) $= N$ sen m. Ma supposto $p-u$ picciolissimo è sen $\frac{1}{2}(p-u) = \frac{1}{2}(p-u)$, e (304) cos m = cos $\frac{1}{2}(p-u)$ cos $\frac{1}{2}(p+u)$ = cos $\frac{1}{2}(p+u)$ così abbiamo $p-u = \frac{2 N \tan m}{n}$

PROB. 7.

Date l'equazioni sen h (n+N) = *sen* u', *e sen* g × (n − N) = *sen* p' *ove si ha* ± h ∓ g = p − u, N *è nota, e son noti sen* m, *sen* i', *sen* m' *medj proporzionali Aritmetici tra sen* p, *e sen* u, *tra sen* g, *sen* h, *tra sen* u' *e sen* p': *trovar l'angolo* u' − p' *che si suppone picciolissimo*.

306. Sottraendo dalla prima la seconda delle due proposte equazioni, avremo sen u' − sen p' = n(sen h − sen g) + N (sen h + sen g), ovvero

(l.709) sen $\frac{1}{2}$ $(u' - p')$ cos $\frac{1}{2}(u' + p') = n$ sen $\frac{1}{2}$ $(h - g)$ cos $\frac{1}{2}$ $(h + g) + N$ sen $\frac{1}{2}$ $(h + g)$ cos $\frac{1}{2}$ $(h - g)$.

Questa equazione in cui non si conosce che il solo N, è quella da cui dee ricavarsi il domandato valor di $u' - p'$. Per eliminarvi perciò le quantità non conosciute ricorro all'enunciazione proposta. Da questa ho l'equazioni

sen $m = \frac{1}{2}$ (sen u + sen p), sen $i' = \frac{1}{2}$ (sen h + sen g)

sen $m' = \frac{1}{2}$ (sen u' + sen p'); da questa ho espressamente $u' - p'$ ed implicitamente $p - u (= \pm h \mp g)$ per picciolissimi; da questa adunque ho (l.709)

sen $i' =$ sen $\frac{1}{2}$ $(h + g)$, cos $i' =$ cos $\frac{1}{2}$ $(h + g)$,

cos $m' =$ cos $\frac{1}{2}(u' + p')$, sen $\frac{1}{2}(u' - p') = \frac{1}{2}(u' - p')$,

sen $\frac{1}{2}$ $(h - g) = \pm$ sen $\frac{1}{2}(p - u) = \pm \frac{1}{2}(p - u) =$ (305)

$\pm \frac{N \tan m}{n}$. Quindi facendo tali sostituzioni nell'equazione preparata alla soluzione, avremo $\frac{1}{2}(u' - p')\cos m' = \pm N \tan m \cos i' + N \operatorname{sen} i$: onde si raccoglie il risultato $u' - p' = \frac{2N \operatorname{sen}(i' \pm m)}{\cos m \cos m'}$

PROB. 8.

Con la regola di doppia falsa posizione trovar un arco x *che sia metà della sua tangente, o calcolare l'equazione* $2x = \tan x$.

307. Il metodo delle false posizioni già usato onde calcolare per approssimazione l'ultima radice dell'equazione $x^3 - 13x + 5 = 0$ proposta (160), è quello che adopro ancora nella soluzione di questo problema, onde mostrarne la pratica nell'equazioni trigonometriche, e convincere in certa maniera della sua generalità.

308. Sia y un valore arbitrario di x, e z quello che ne risulta nel secondo membro, allorchè si fa $x = y$ nel primo; sia cioè l' equazione (a... $2y = \tan z$: sia inoltre k la differenza tra il vero, ed

il valore ipotetico di x, ed h quella tra il vero ed il valore di x che ne risulta nel secondo membro, sia cioè $k = x - y$, $h = x - z$, e però $x = y + k = z + h$: sia finalmente sostituito ciò nell' equazione proposta ed avremo $2(y+k) =$

$$\tan(z+h) = (l.719)\ \frac{\tan z + \tan h}{1 - \tan z \tan h}, \text{ ovvero}$$

mettendo $\tan z$ per $2y$, e trasponendo,

$\tan h\,(1 + \tan^2 z) = 2k\,(1 - \tan h \tan z)$. Quindi

riflettendo che $\tan h = \frac{\operatorname{sen} h}{\cos h}$, $\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$, e

$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$, avremo $\operatorname{sen} h = 2k \cos z\,(\cos z \cos h - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} h) = 2k \cos z \cos(z+h) =$
$2(z - y + h) \cos z \cos(z+h)$, e riguardando h come assai picciolo avremo l' equazione

$$(b) \ldots h = \frac{2(z-y)\cos z \cos(z+h)}{1 - 2\cos z \cos(z+h)}, \text{ ovvero per pre-}$$

pararla all' applicazione de' logaritmi supponendo $\cos z \cos(z+h) = \cos^2 u$, avremo

$$h = \frac{2(z-y)\cos^2 u}{1 - 2\cos^2 u} = (l.712)\ \frac{2(y-z)\cos^2 u}{\cos nu}.$$ In que-

sta equazione il valor di h è dipendente dalla conoscenza di se stesso; ma l' ipotesi di essere picciolissimo previene questo inconveniente in quanto ci dà sensibilmente $\cos(z+h) = \cos z$ e perciò riduce sensibilmente la (b) alla equazione

$$(c) \; \ldots h = \frac{2(z-y)\cos^2 z}{1-2\cos^2 z} = \frac{2(y-z)\cos^2 z}{\cos 2z}.$$

Questo metodo adunque ci porta alle tre equazioni (a), (b), (c) onde risponder con esse all' enunciazione proposta: equazioni cui il Cagnoli (Trigonometria piana e sferica num. 367 Parigi) arriva mercè l'uso del calcolo differenziale.

309. Calcolando la prima (a) di queste equazioni; impiegatone quindi nella (c) il valor che ne risulta per z, si avrà un valore per h, con cui dalla (b sene ottiene un secondo onde correggere con approssimazione maggiore l' ipotetico y: Un numero assai ristretto di suppcsizioni per y ci porta prontamente coll' uso di queste formule al risultato che noi andiamo cercando.

In effetto partendo coll'Eulero dall'ipotesi $y = 60°$, noi veniamo al

Calcolo della form. (a)

$l\,120 = 2,0791818$
$\text{col}\,ro = 8,2410774$

somm: $10,3210586 = l\,\tan 64° 48' 37'', 8$
$z = 64° 29',\ y - z = -4° 29' = -4°,48$

Calcolo della form. (c)

$l\,8,96 = 0,9523080$
$al\,\cos 64° 29' = 9,2654952$
$\text{col}\,\cos 128° 58' = \text{col}\,\cos 51° 2' = 0,2014474$

som. $= 0,4222406 = l\,2,64$
$h = 2° 38',\ k = 7° 7'$, ed $x = 67° 7'$

310. L'appressimazione di questo risultato non può contentare le nostre ricerche. Il metodo onde abbiamo trovato la formula (c) non è appoggiato che all' ipotesi di $h = \text{sen}\,h$, e di $\cos(z+h) = \cos z$. Paragonando i logaritmi de' seni con quelli degli archi, e quelli de' coseni fra loro si resta convinto che la prima ipotesi è permessa senza errore sensibile fino ad 1°, e che tanto è più grande l' errore che si commette nella seconda quanto più z si avvicina a 90°, e quanto più grande è h. Quindi apparendo che il trovato valore per x dee essere molto lontano dal vero fa che io passi al

Calcolo della form. (*b*)

l cos 64° 25′ = 9, 6342491
l cos 67° 7′ = 9, 5897868

som. = 9, 2240379

$\frac{1}{2}$ som. = 9,6120189 = l cos *u* = l cos 65°50

− l 8,98 = 0,9523080
col cos 131° 40′ = 0,1773117
2 l cos *u* = 9,2240379

l 2°,26 = 2° 15′ 36″ = 0,3536576

h = 2° 15′ 36″; k = 6° 44′ 36″, ed *x* = 66° 44′ 36″

311. Le ragioni addotte di sopra ci chiamano ad una seconda ipotesi onde avvicinarci di vantaggio al vero valor di *x*: partendo col Cagnoli dall' ipotesi *y* = 66° 45′ = 66°, 75, vengo al

2° Calcolo della formula (*a*)

l 133, 5 = 2, 1254813
col *r* = 8, 2418774

som. = 10, 3673587 = l tan 66° 46′ 18″, 72

z = 66° 46′ 18″, 72, ed *y* − *z* = − 1′ 18″, 72 = − 78″, 72

2° Calcolo della formula (c)

$$l\,157{,}44 = 2{,}1971151$$
$$2\ \text{col}\cos 66^\circ 46' = 9{,}1920424$$
$$\text{col}\cos 133^\circ 33' = -\text{col}\cos 46^\circ 27' = 0{,}1617888$$

$$l\,35'',56 = \text{som.} = 1{,}5509463$$

$h = 35,''56, k = 54'',28,$ ed $x = 66^\circ 46' 54'',28$
$= 66^\circ 46' 54'' 16''',8$

312. Questo risultato non differisce che di 2''',8 da quello dato dall' autore delle lezioni. Noi lo crediamo abbastanza prossimo al vero, e perciò ci dispensiamo di ricalcolare la formula (b), onde averne una maggiore approssimazione. Pria di metter fine a questa soluzione voglio avvertire che il risultato avuto dal 2° Calcolo della formula c) differisce di 0'',05 da quello che il Cagnoli (op.cit.num.cit.) dà colla medesima ipotesi. Quindi una rivisione di cui io mi dispenso, alle parti di tutto questo Calcolo delle formule farà rilevare facilmente donde questa differenza proviene.

PROB. 9.

Con la regola di doppia falsa posizione ricavare il valor dell' angolo x *dall'equazione*

$$\sin 16' = \frac{2\sin x \sin^2 \frac{1}{2} x}{\cos 2x}$$

313. Il metodo con cui rispondo alla questione proposta, è quello che si espone (l.316), e per mostrarne l'uso nelle formule trigonometriche

Ne prendo pertanto la formula (a) $x = \frac{an-bm}{n-m} = \frac{an-bm}{n-m}$ arc. 1°,

e vengo alla

I. Ipot. . . . $x = 10° = 10.\text{arc}.1° = a.\text{arc}.1°$.

$l\ 2 = 0,3010300$

l sen $10° = 9,2396702$

$2l$ sen $5° = 7,8805920$

col cos $20° = ,0270142$

som. $= 7,4483064$

l sen $16' = 7,6678445$

$m = 0,2195381$ . . . primo errore

314. Un errore positivo mi dice che x dee esserne maggiore, poichè i seni aumentano nel primo quadrante, e i coseni diminuiscono come si accrescono gli archi, cui corrispondono, e poichè adunque x aumentando, il numeratore ne cresce, il denominatore ne diminuisce. Quindi passo ad una

II. Ipot. . . . $x = 11° = 11.$ arc. $1° = b.$arc $1°$

l 2 = 0,3010300
l sen 11° = 9,2805988
2 l sen 5°30' = 7,9631458
col cos 22° = 0,0328341

som = 7,5776087
l sen 16' = 7,6678445

n = 0,0902350 . . . secondo errore

Quindi con queste due posizioni, e cogli errori corrispondenti calcolo la formula (a) e ne ottengo $x = 11°41'52'',8$

315. Ricalcolo la proposta equazione, onde vedere se il trovato valor di x viene a soddisfarvi: ma se ci darà un errore, avremo con esso a rifare il calcolo della (a), onde averne per x un valore più approssimato. Quindi vado a far la

III. Ipot. . . $x = 11°41'52'',8 = 11°,698$
$= 11,698.$ arc. $1°$

l 2 = 0,3010300
l sen 11°41'52'',8 = 9,3069675
2 l sen 5°50'56'',4 = 8,0164088
col cos 23°23'45'',6 = 0,0372601

som = 7,6616664
l sen 16' = 7,6678445

n = 0,0061781 . . terzo errore

Col paragone di quella colla seconda Ipotesi; vado alla formula (a), e ne ottengo
$x = 11^\circ 44' 58'',5$.

Questa nuova approssimazione per x impiegata nel calcolo dell' equazione proposta mi dà un errore sì piccolo che credo poterlo riguardare come insensibile, e poter conchiudere perciò che $11^\circ 44' 58'', 5$ è il valore approssimatissimo cercato per x; valore più approssimato al vero di quello che ci dà l' autore delle lezioni.

PROB. 10.

Con le formule del num.(l.727) sommare in generale la serie $S = sen\, a + sen\,(a+b) + sen(a+2b) + \ldots \ldots + sen\,(a+nb)$, e determinar particolarmente S nel caso di $a+nb = (n+1)a = 90^\circ$.

316. La serie enunciata a sommare non è che un caso particolare della $sen^m\, ap + sen^m\,(a+b)\,p + sen^m\,(a+2b)p + \ldots sen^m\,(a+nb)p$, il caso cioè che corrisponde ad $m = 1 = p$. Quindi per dare una veduta più generale a questa soluzione, io cerco il termine sommatorio di questa serie, che rappresenta tutte le dirette delle potenze simili de' seni di archi in progressione aritmetica, facendo uso di quelle formule della trigonometria analitica che ci sono state enunciate per condizione,

Quindi darò il caso particolare mercè una semplice applicazione del risultato generale.

317. Prendo dal numero enunciato (I.727) le formule occorrenti alla proposta ricerca: io le prendo senza dimostrarle per ora con quelle maggiore evidenza matematica, di cui sono esse capaci; e ciò perchè avrò occasione di farlo nelle lezioni che nell' avvertimento promisi.. Quindi ho

$$\text{sen}^m (a+nb)\, p = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^m}\Big(e^{m(a+nb)p\sqrt{-1}} - me^{(m-2)(a+nb)p\sqrt{-1}} + \frac{m(m-1)}{2} e^{(m-4)(a+nb)p\sqrt{-1}} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3} e^{(m-6)(a+nb)p\sqrt{-1}} + \text{ec.}\Big)$$

Quindi facendo in questa espressione successivamente $n=0=1=2=$ec. avremo tutti i termini della serie in questione, avremo cioè

$$\text{sen}^m ap = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^m}\Big(e^{map\sqrt{-1}} - me^{(m-2)ap\sqrt{-1}} + \frac{m(m-1)}{2} e^{(m-4)ap\sqrt{-1}} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3} e^{(m-6)ap\sqrt{-1}} + \text{ec.}\Big)$$

$$\text{sen}^m (a+b)p = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^m}\Big(e^{m(a+b)p\sqrt{-1}}$$

$$- me^{(m-2)(a+b)p\sqrt{-1}} + \frac{m(m-1)}{2} e^{(m-4)(a+b)p\sqrt{-1}}$$

$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} e^{(m-6)(a+b)p\sqrt{-1}} + \text{ec.}\Big)$$

$$\text{sen}^m (a+2b)p = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^m}\Big(e^{m(a+2b)p\sqrt{-1}}$$

$$- me^{(m-2)(a+2b)p\sqrt{-1}} + \frac{m(m-1)}{2} e^{(m-4)(a+2b)p\sqrt{-1}}$$

$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} e^{(m-6)(a+2b)p\sqrt{-1}} + \text{ec.}\Big)$$

. . . .

$$\text{sen}^m (a+nb)p = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^m}\Big(e^{m(a+nb)p\sqrt{-1}}$$

$$- me^{(m-2)(a+nb)p\sqrt{-1}} + \frac{m(m-1)}{2} e^{(m-4)(a+nb)p\sqrt{-1}}$$

$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} e^{(m-6)(a+nb)p\sqrt{-1}} + \text{ec.}\Big)$$

318 Quindi la ſerie propoſta ſi decompone in tante, altre ſerie ſemplici, quante ſono le linee verticali che formano l' aggregato de' ſuoi termini. Quindi per avere l' eſpreſſione della ſomma cercata, baſta cercarne quelle di tutte queſte ſerie ſemplici, e ſommarle inſieme. Quindi per queſte ſomme parziali oſſervo che le ſerie ſemplici, cui eſſe appartengono non ſono che delle progreſſioni geometriche, di cui ſene conoſcono il numero de' termini $= n+1$, il primo di eſſi h, ed il quoziente q

$$h^{0} = e^{map\sqrt{-1}} \quad \ldots \quad q^{0} = e^{mb\sqrt{-1}}$$

$$h' = e^{(m-2)ap\sqrt{-1}} \quad \ldots \quad q' = e^{(m-2)b\sqrt{-1}}$$

$$h'' = e^{(m-4)ap\sqrt{-1}} \quad \ldots \quad q'' = e^{(m-4)b\sqrt{-1}}$$

$$h''' = e^{(m-6)ap\sqrt{-1}} \quad \ldots \quad q''' = e^{(m-6)b\sqrt{-1}}$$

ec. ec.

e perciò mercè la formula (l.298)

$$S = h\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)$$ ſene avranno le ſomme

$$S^{0} = e^{map\sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{m(n+1)b\sqrt{-1}}-1}{e^{mb\sqrt{-1}}-1}$$

$$S' = me^{(m-2)ap\sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{(m-2)(n+1)b\sqrt{-1}}-1}{e^{(m-2)b\sqrt{-1}}-1}$$

$$S'' = \frac{m(m-1)}{2}\, e^{(m-4)ap\sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{(m-4)(n+1)b\sqrt{-1}}-1}{e^{(m-4)b\sqrt{-1}}-1}$$

$$S''' = -\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\, e^{(m-6)ap\sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{(m-6)(n+1)b\sqrt{-1}}-1}{e^{(m-6)b\sqrt{-1}}-1}$$

ec. ec.

319. Quindi $S = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^m}(S^0 + S' + S'' + S''' + \text{ec.}) =$

$$\frac{1}{(2\sqrt{-1})^m}\Bigg(e^{map\sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{m(n+1)b\sqrt{-1}}-1}{e^{mb\sqrt{-1}}-1}$$

$$- m e^{(m-2)ap\sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{(m-2)(n+1)b\sqrt{-1}}-1}{e^{(m-2)b\sqrt{-1}}-1}$$

$$+ \frac{m(m-1)}{2}\, e^{(m-4)ap\sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{(m-4)(n+1)b\sqrt{-1}}-1}{e^{mb\sqrt{-1}}-1}$$

$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\, e^{(m-6)ap\sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{(m-6)(n+1)b\sqrt{-1}}-1}{e^{(m-6)b\sqrt{-1}}-1} + \text{ec.}\Bigg)$$

Quindi senza occuparmi sul progresso di questa formula per esserne assai chiara e manifesta la legge passo all' applicazione che forma il soggetto di questo problema.

320. Supposto $m = 1 = p$, avreme

$$S = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left(e^{a\sqrt{-1}} \frac{e^{(n+1)b\sqrt{-1}} - 1}{e^{b\sqrt{-1}} - 1} \right.$$

$$\left. - e^{-a\sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{-(n+1)b\sqrt{-1}} - 1}{e^{-b\sqrt{-1}} - 1} \right) =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}(2 - e^{b\sqrt{-1}} - e^{-b\sqrt{-1}})} \left(e^{a\sqrt{-1}} (e^{(n+1)b\sqrt{-1}} \right.$$

$$- 1)(e^{-b\sqrt{-1}} - 1) - e^{-a\sqrt{-1}} (e^{-(n+1)b\sqrt{-1}}$$

$$\left. - 1)(e^{b\sqrt{-1}} - 1) \right) =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}(2 - e^{b\sqrt{-1}} - e^{-b\sqrt{-1}})} (e^{(a+nb)\sqrt{-1}}$$

$$- e^{-(a+nb)\sqrt{-1}}) - (e^{(a+nb+b)\sqrt{-1}}$$

$$-e^{-(a+nb+b)\sqrt{-1}}\big) - \big(e^{(a-b)\sqrt{-1}} - e^{-(a-b)\sqrt{-1}}$$

$$+ e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}\big) = (\text{l}.727)$$

$$\frac{1}{2(1-\text{cof}\,b)}\big(\text{fen}\,(a+nb) - \text{fen}\,(a+nb+b)$$

$$-\text{fen}.(a-b) + \text{fen}.a\big) = (\text{l}.709.712)$$

$$\frac{1}{2-2\,\text{fen}.^2\frac{1}{2}b}\Big(-2\,\text{fen}.\frac{1}{2}b\,\text{cof}.(a+(n+\frac{1}{2})b)$$

$$+ 2\,\text{fen}\frac{b}{2}\,\text{cof}(a-\frac{b}{2})\Big) =$$

$$\frac{1}{2\,\text{fen}\frac{1}{2}b}\Big(\text{cof}(a-\frac{1}{2}b) - \text{cof}(a+nb+\frac{b}{2})\Big)$$

Fatta ancora in questa espressione $a+nb=(n+1)a$ $=90^\circ$, cioè $a=b$, si avià

$$S = \frac{1}{2\,\text{fen}.\frac{1}{2}a}\,\text{cof}\big(\frac{1}{2}a - \text{cof}.(90^\circ+\frac{a}{2})\big)$$

$$= (\text{l}.704.20)\,\frac{1}{2}(1+\text{cot}\,\frac{a}{2})$$

321 Se vogliamo sommare ancora la serie diretta delle potenze simili de' coseni di archi in progressione aritmetica, cioè se vogliamo sommare la serie

$$\text{cos.}^m ap + \text{cos.}^m (a+b)p + \ldots \text{cos.}^m (a+nb)p,$$

basta riflettere come sopra che (l.727)

$$\text{cos.}^m (a+nb)p = \frac{1}{2^m}\left(e^{(a+nb)p\sqrt{-1}} + e^{-(a+nb)p\sqrt{-1}}\right)^m =$$

$$\frac{1}{2^m}\left(e^{m(a+nb)p\sqrt{-1}} + me^{(m-2)(a+nb)p\sqrt{-1}} + \frac{m(m-1)}{2}e^{(m-4)(a+nb)p\sqrt{-1}} + \text{ec.}\right)$$

e però che questa formula dalla corrispondente del caso precedente altra differenza non ha che ne' segni, e nel coefficiente. Quindi dalle operazioni di quel caso, possiamo conchiuderne per questo

$$S = \frac{1}{2^m}\left(e^{map\sqrt{-1}}\,\frac{e^{m(n+1)b\sqrt{-1}} - 1}{e^{mb\sqrt{-1}} - 1}\right.$$

$$+ me^{(m-2)ap\sqrt{-1}}\,\frac{e^{(m-2)(n+1)b\sqrt{-1}} - 1}{e^{(m-2)b\sqrt{-1}} - 1} + \text{E}$$

$$\frac{m(m-1)}{2} e^{(m-4)ap\sqrt{-1}} \frac{e^{(m-4)(n+1)b\sqrt{-1}}-1}{e^{(m-4)\sqrt{-1}}-1} + ec. \Big)$$

la quale essendo $m = 1 = p$, diviene

$$\phi = \frac{1}{2}\left(e^{a\sqrt{-1}} \cdot e \frac{(n+1)b\sqrt{-1}-1}{e^{b\sqrt{-1}}-1} + e^{-a\sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{-(n+1)b\sqrt{-1}}-1}{e^{-b\sqrt{-1}}-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2(2-e^{b\sqrt{-1}}-e^{-b\sqrt{-1}})} \big(e^{a\sqrt{-1}}\big(e^{(n+1)b\sqrt{-1}}$$

$$-1)(e^{-b\sqrt{-1}}-1) + e^{-a\sqrt{-1}}\big(e^{-(n+1)b\sqrt{-1}}-1\big)\big(e^{b\sqrt{-1}}-1\big)\big) =$$

$$\frac{1}{2(2-e^{b\sqrt{-1}}-e^{-b\sqrt{-1}})}\Big(\big(e^{(a+nb)\sqrt{-1}} + e^{-(a+nb)\sqrt{-1}}\big)$$

$$-\big(e^{(a+nb+b)\sqrt{-1}} + e^{-(a+nb+b)\sqrt{-1}}\big) - \big(e^{-(a-b)\sqrt{-1}}$$

$$+ e^{(a-b)\sqrt{-1}}\big) + e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}\Big) = (1.727)$$

$$\frac{1}{2(1-\text{cos}.b)} \text{cos}.(a+nb) - \text{cos}.(a+(n+1)b) - \text{cos}.(a-b)$$

$$+ \text{cos}.a = (1.712.709))$$

$$\frac{1}{2\,\text{sen.}^2\frac{1}{2}b}\left(\text{sen.}\left(a+\left(n+\frac{1}{2}\right)b\right)\text{sen}\frac{1}{2}b-\text{sen.}\left(a-\frac{1}{2}b\right)\text{sen.}\frac{1}{2}b\right)=$$

$$\frac{1}{2\,\text{sen.}\frac{1}{2}b}\left(\text{sen.}\left(a+\left(n+\frac{1}{2}\right)b\right)-\text{sen.}\left(a-\frac{1}{2}b\right)\right).$$

Questo risultato nel caso di $a+nb=(n+1)a=90^{o}$ diviene

$$S=\frac{1}{2\,\text{sen.}\frac{1}{2}a}\left(\text{sen.}\left(90^{o}+\frac{1}{2}a\right)-\text{sen.}\frac{1}{2}a\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(\text{cot.}\frac{1}{2}a-1\right)$$

322. Tanto basta al nostro soggetto. Sulla somma generale delle diverse specie di serie può riscontrarsi una bella memoria, che il primo presidente della società Italiana ci ha dato nel primo volume delle sue raccolte. Il Cav. Lorgna, uno di quegli uomini che la natura produce, onde promuovere i lumi, ed arricchir le scienze, non

ſolo fu il primo preſidente, di cui ho inteſo parlare, ma il fondatore ancora di tal ſocietà. Queſt' uomo ſingolare nella ſemplice condizion di privato riunì in un ſol corpo i dotti d' Italia, e formò nel 1781 un' Accademia nazionale per le ſcienze eſatte, che ormai la contende colle prime di Europa. Egli non ſolo ſi reſe utile alla patria con queſta fondazione, m' ancor ha de' dritti alla noſtra riconoſcenza per aver prodotto alla luce delle opere intereſſanti tanto alla pratica che alla teoria delle matematiche.

Mi ſi perdoni intanto queſta notizia Apologetica, perchè non ho preteſo con eſſa che preſtare omaggio ad un uomo, che co' ſuoi proprj travagli, e con quei della di lui fondata ſocietà ha molto contribuito all' aumento delle cognizioni utili, al luſtro ed alla gloria della nazione, cui noi apparteniamo.

PROB. 11.

Riſolvere l'equazioni della forma $x^m \pm a^m = 0$.

323. Cotes morto aſſai giovane, ci laſciò fra le ſue carte un teorema ſenza dimoſtrazione ſopra una bella proprietà del cerchio. Moivre ne 1730 in un opera latina non ſolo generalizzò queſto teorema, ma cene diede ancora la dimoſtra

zione, mercè l'uso di una sezione conica. Questa dimostrazione può facilmente cavarsi dalla soluzione dell'equazione $(A)\ldots x^{2r}-2px^r+q=0$, facendo uso delle formule (l.727). Quindi per dare una veduta più generale, e per estendere ancora le nostre ricerche ci proponiamo di trovare i fattori della (A); dedurre da essi quei dell'equazioni enunciate; dimostrarne il teorema di Moivre; e come un caso particolare tirarne quello di Cotes.

374. Trattando la (A) co'metodi ordinarj sene avrà $x^r=p\pm\sqrt{(p^2-q)}$: donde i due casi di $p^2>,o<q$. Nel primo di questi casi si tratta di risolvere un'equazione della forma $x^r-k=0$, in cui k è una quantità reale; e nel secondo sene dee risolvere una della forma $x^r-p\mp\sqrt{-1}\sqrt{(q-p^2)}=0$. Esaminiamo l'uno dopo l'altro questi due casi.

I. $x^r-k=0$ ci dà $\frac{x}{\sqrt[r]{k}}=1=$(l.710) $(\cos.2ci$

$+\sqrt{-1}.\text{sen}\,2ci)^{\frac{1}{r}}=e^{\frac{2ci}{r}\sqrt{-1}}$ (1732)

Quindi essendo (l.727)

$$\cos\frac{2ci}{r}=\frac{e^{\frac{2ci}{r}\sqrt{-1}}+e^{-\frac{2ci}{r}\sqrt{-1}}}{2}=\frac{x^2+h^{\frac{2}{r}}}{2x^r\sqrt{k}},$$

si avrà $(a)\ldots x^2-2xk^{\frac{1}{r}}\cos\frac{2ci}{r}+k^{\frac{2}{r}}=0$ per l' espressione generale de' fattori doppj della (A) corrispondenti a questo caso.

II. $x^r-p\mp\sqrt{(q-p^2)}\sqrt{-1}=0$ ci dà

$$x=\left(p\pm\sqrt{(q-p^2)}\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{r}}=(\text{l}.734)$$

$$\left(\sqrt{q}\,(\cos h\pm\sqrt{-1}\,\text{sen}\,h)\right)^{\frac{1}{r}}$$ in cui $\cos h$

$=\frac{p}{\sqrt{q}}$. Quindi (l.710) $x=$

$${}^{2r}\sqrt{q(\cos(2ci\pm h)\pm\sqrt{-1}\,\text{sen}\,(2ci\pm h))}^{\frac{1}{r}}$$

$$=(1.735)^{2r}\sqrt{q}\left(\cos\frac{2ci\pm h}{r}\pm\sqrt{-1}\;\text{sen}\,\frac{2ci\pm h}{r}\right):$$

donde $(b)\ldots x-{}^{2r}\sqrt{q}\left(\cos\frac{2ci\pm h}{r}\pm\sqrt{-1}\;\text{sen}\frac{2ci\pm h}{r}\right)$

$=0$ pe' fattori semplici della (A) pel secondo caso, dal cui prodotto sene ha il composto trinomiale

$$(c)\ldots x^2-2xq^{\frac{1}{2r}}\cos\frac{2ci\pm h}{r}+q^{\frac{1}{r}}=0.$$

325. Facendo passare c per tutti i termini della serie naturale de' numeri, si avranno di uno in uno tutti i fattori doppj della (A) in tutti i casi. Si osservi però che questo c non può oltrepassare r esclusivamente, e ciò perchè ci viene provato tanto a priori dal grado $2r$ dell' equazione proposta, quanto a posteriori dalle formule (a), (c) le quali dopo $c=r-1$ ci ripetono i valori medesimi.

326. Deduciamo i fattori dell' equazioni $x^m\pm a^m=0$. Paragonando queste equazioni

colla (*A*) ne abbiamo $m = 2r$, $p = 0, q = \pm a^m$
Quindi il caso del segno inferiore appartiene al numero (I), e quello del superiore al num. (II)
Infatti riflettendo

(I) che $k = \sqrt{-q} = \sqrt{a^m}$, che $\frac{x}{\sqrt[r]{k}} = \frac{x}{\sqrt[m]{k^2}} =$

$\frac{x}{a} = 1$ e però che $\cos\frac{2ci}{m} = \frac{x^2+a^2}{2ax}$, si avrà

$x^2 - 2ax\cos\frac{2ci}{m} + a^2 = 0$ pei fattori della

$x^m - a^m = 0$; e (II) che $\cos h = \frac{p}{\sqrt{q}} = 0$, e però

$h = 90° = \frac{i}{2}$, $\frac{x}{\sqrt[r]{q}} = \frac{x}{a}\left(= \cos\frac{2ci \pm h}{r}\right.$

$\left.\pm\sqrt{-1}\,\text{sen}\frac{2ci\pm h}{r}\right) = \cos\frac{(4c\pm 1)\,i}{2r} \pm \sqrt{-1}\,\text{sen}\frac{(4c\pm 1)\,i}{2r}$

$= (1.735)(\pm\sqrt{-1})^{\frac{4c\pm 1}{r}} = \sqrt[m]{-1} = (1.710.735)$

$\cos\frac{2c+1}{m}i \pm \sqrt{-1}\,\text{sen}\frac{2c+1}{m}i$, si avrà

$x - a\left(\cos\frac{2c+1}{m}i \pm \sqrt{-1}\,\text{sen}\frac{2c+1}{m}i\right) = 0$, pe' fat-

tori semplici della $x^m + a^m = 0$, e dal loro prodotto $x^2 - 2ax \cos\frac{2c+1}{m} i + a^2 = 0$ per l'espressione generale de' suoi fattori doppj.

Veni mo a cavarne la dimostrazione del teorema di Moivre.

327. Se sopra la circonferenza (Fig. 13) di un cerchio si prende $Am = \frac{h}{r}$, in cui h è un arco indeterminato, e quindi incominciando da m essa si divide in r parti eguali; se da un punto x preso sul diametro che passa per A si tirano a' punti di divisione le rette mx', m_1x', m_2x', ... $m_c x'$ si avrà $Am = \frac{h}{r}$, $Am_1 = \frac{2i \pm h}{r}$, $Am_2 = \frac{4i + h}{r}$, ! $Am_c = \frac{2ci \pm h}{r}$, in cui il segno inferiore ha luogo quando gli archi si prendono da A per m_7. Quindi chiamato a il raggio del cerchio, e fatto $Cx' = x$, si avrà $Ox' = oC - Cx' = a \cos\frac{2ci \quad h}{r} - x$, e

però $x'm_c^2 = x^2 - 2ax \cos\frac{2ci \pm h}{r} + a^2$.

328. Paragonando questa espressione con quella de' fattori doppj della (A), io osservo che fatto $q = a^{2r}$ quella del numero (II) le è perfettamente identica; che essendo $q = a^{2r}$, sarà $p (= \sqrt{q} . \cos h) = a^r \cos h$, e però che l'espressione trovata rappresenta i fattori doppj dell'equazione $x^{2r} - 2a^r x^r . \cos h + a^{2r} = 0$. Quindi si avrà $(h) \ldots x'm^2 . x'm_1^2 . x'm_2^2 \ldots . x'm_{r-1}^2 = x^{2r} - 2a^r x^r \cos h + a^{2r} = Cx'^{2r} - 2AC^r . Cx'^r . \cos h + AC^{2r}$ locchè forma la proprietà che nel citato teorema si propone a dimostrare.

329. In questo calcolo abbiamo considerato x' alla destra di O, se vi sarà alla sinistra, in cui si comprende ancora il caso di x' fuori del cerchio, allora si avrà Ox' negativo: locchè non può produrvi alcun cambiamento, mentre il solo suo quadrato è quello che vi entra. Inoltre abbiamo supposto x' dalla parte medesima di A rapporto a C, se vi sarà dalla parte opposta, si avrà x

negativo; ciò senza variare il progresso dell' operazione non produce che il solo cambiamento di segno nel secondo termine tanto della (A) che de'suoi fattori. Osserviamo in questo luogo che nell' espressione di questi fattori si dee osservare la nota regola de'segni (I.704) onde modificarla a seconda che m_c, corrisponde a'diversi quadranti del cerchio.

330. Per dedurne da questa la proprietà contenuta nel teorema di Cotes, si sappia che la differenza tra l'uno e l' altro teorema, non è che in quello di Moivre le divisioni si rapportano ad un punto m distante $An = \frac{h}{r}$ da A, laonde in quello di Cotes si rapportano al medesimo A; e che nel primo la circonferenza si divide in r, e nel secondo in $2r$ parti eguali. Quindi facendo $Am = \frac{h}{r} = 0$, sarà cos $h = 1$, e però l' equazione

(k) diviene $x'm^2 . x'm_1^2 . x'm_2^2 \ldots x'm_{r-1}^2 =$

$Cx'^{2r} - 2AC^r . Cx'^r + AC^{2r}$, cioè

$x'm . x'm_1 . x'm_2 \ldots x'm_{r-1} = Cx'^r - AC^r$. Per averne la seconda parte della differenza fra i teoremi si faccia $Am = \frac{h}{r} = \frac{i}{r}$, e però $h = i$, e

cos $h = -1$: onde la medesima (k) diviene

$$x'm_{1:2} \cdot x'm_{3:2} \cdot x'm_{5:2} \cdots x'm_{r-1:2} = Cx'^{r} + 'AC^{r}$$

. Quindi la proprietà contenuta nel teorema di Cotes si presenta sotto l' espressione di queste due equazioni, che sono due casi particolari di quella con cui si esprime la proprietà di quello d' Moivre. Abbiamo già soddisfatto a quanto fummo a proporci in principio. Quindi passiamo al problema seguente.

PROB. 12.

Un Vascello si avanzò di 50 mig. a Levante e di 116 a Tramontana, qual è la posizione e la lunghezza della linea retta per cui ha camminato?

231. Senza ricorrere a raziocinj ed a dimostrazioni si vede facilmente che il Vascello in questione non potè seguire nel medesimo tempo le due rotte semplici di Levante e Tramontana; ma che dovette camminare per una strada ad esse intermedia. La questione adunque si riduce a calcolare l' angolo che la rotta composta fa colla Tramontana, e la quantità del cammino. Sia x la prima, ed y la seconda di queste quantità; sia $a = 50$, $b = 116$; e se sul termine della rotta semplice di Tramontana si concepisce alzata una normale, essa ne incontrerà la composta in

un punto che determina la quantità del cammino, e formerà un triangolo rettangolo, in cui oltre l' angolo retto si conosceranno i due cateti a, b. Questo triangolo dandoci (l. 741) $\tan x = \frac{a}{b}$

$= \tan. 23° 19' 4''$, $y = $ (l. 740) $\sqrt{(a^2+b^2)}$, $=$ (l. 750) $\frac{b}{\cos x}$, $=$ (l. 752) $\frac{a}{\operatorname{sen} x} = 126$ circa, ci dice che il Vascello enunciato cammino per 126 miglia circa al Nord-nord-est-49' 4''-nord-est.

PROB. 13.

Data l' area S *e uno degli angoli acuti* a *di un triangolo rettangolo trovarne i lati* x, y, *e l' ipotenusa* z?

332. Abbiamo (l. 601. I.) $S = \frac{1}{2} xy$, e però $y = \frac{2S}{x}$, $x = \frac{2S}{y}$. Inoltre abbiamo (l. 755) $x = y \tan a$, e (l. 740) $z = \sqrt{(x^2+y^2)}$: Quindi $x = \sqrt{2S \tan a}$, $y = \sqrt{2S \cot a}$, e $z = \sqrt{\frac{S}{\operatorname{sen} 2a}}$.

PROB. 14

Dati i lati AC = a, *AH* = b, *e gli angoli* ACB = m, AHB = n, CBH = r *di un quadrilatero trovar* AB, *e la diagonale* AB.

333. Per non aggiungere (Fig. 123) una figura mi servo della 123esima delle lezioni. In essa i triangoli *ACB*, *AHB* ci danno (1762)

$AB = \frac{a \text{ sen } m}{\text{sen } ABC} = \frac{b \text{ sen } n}{\text{sen } ABH}$: donde sen $ABC =$

$\frac{a \text{ sen } m . \text{ sen } ABH}{b \text{ sen } n} = \frac{a \text{ sen } m . \text{ sen} \pm (r - ABC)}{b \text{ sen } n} =$

$\pm \frac{a \text{ sen } m}{b \text{ sen } n}(\text{sen } r \text{ cos } ABC - \text{sen } ABC \text{ cos } r)$, e però

$b \text{ sen } n = \pm a \text{ sen } m \text{ sen } r \text{ cot } ABC \mp a \text{ sen } m \text{ cos } r$, e

finalmente $\text{cot } ABC = \frac{a \text{ sen } m \text{ cos } r \pm b \text{ sen } n}{a \text{ sen } m \text{ sen } r}$.

334. Conoscendo *ABC* si conoscerà ancora la diagonale *AB*. Infatti, supposto per semplicità $\frac{a \text{ sen } m \text{ cos } r \pm b \text{ sen } n}{a \text{ sen } m . \text{ sen } r} = h$ si avrà

$\text{sen } ABC = \frac{\text{cos } ABC}{h} = \frac{1}{h}\sqrt{(1 - \text{sen}^2 ABC)}$: donde

si tira $\text{sen}\, ABC = \frac{1}{\surd(1+h^2)}$, e però $AB = \frac{a\, \text{sen}\, m}{\text{sen}\, ABC}$

$= a\, \text{sen}\, m \surd(1+h^2) = \frac{1}{\text{sen}\, r} (b\, \text{sen}\, n (b\, \text{sen}\, n$

$\pm 2a\, \text{sen}\, m \cos r) + a^2\, \text{sen}^2 m)^{\frac{1}{2}}$

PROB. 15.

Dati due cerchj concentrici NPK, QRQ *colla tangente in* Q *e la corda* QR *nel minore; e condotta dal punto* N *la* NK *parallela a* QR, *la* NE *normale ad* NP, *e la* NL *che formi l'angolo* LNE = ENK; *trovar la ragione di* NK+NL *a* QR.

355. Per venire allo sviluppo (Fig. 1.:) della questione tiro alle corde QR, LN, NP le normali Ay, Ax, AQ, alla NK le normali mR, $Q2$ ed unisco i punti N ed A, R e K colle rette AN, RK. Ciò fatto io ho $NQ2 = 90° - AQ2 = AQy (= 90° - AQ2) = ENK$ $(= 90° - KNQ) = ENL = p$. Quindi (l.757.758) i triangoli AyQ, $N2Q$ mi danno $Qy = AQ \cos p$, $N2 = NQ\, \text{sen}\, p$. e quindi per essere $N2 = mK$, $m2 = QR = 2Qy$, io ho $NK = 2(N2 + Qy) = 2(AQ \cos p + NQ\, \text{sen}\, p)$.

Di più il triangolo AQN mi dà sen $ANQ = \frac{AQ}{AN}$, cos $ANQ = \frac{NQ}{AN}$, e però cos $ANx =$ cos$(ENQ + ENx - ANQ) =$ cos$(90° + p - NAQ) =$ (I.704) sen $(ANQ - p) = \frac{AQ \cos p - NQ \operatorname{sen} p}{AN}$.

Quindi dal triangolo AxN ho $Nx = AN$ cos ANx $= AQ$ cos $p - NQ$ sen p, e però $NL = 2Nx =$ $2(AQ.$ cos $p - NQ.$ sen $p)$, ed $NL + NK = 4AQ$ cos p, cioè $NL + NK = 2\ QR$. Quindi conchiudo che la ragione cercata è doppia.

PROB. 16.

Data la retta AC *comune sezione di due piani triangolari* ACB, ACD *tali che la retta* BD *condotta per i due vertici sia normale al piano* ACD; *e dati, oltre al triangolo* ACB, *gli angoli d' inclinazione* BCD = m, BAD = n, *determinare il triangolo* ACD *o sia trovare sul piano indeterminato* MAR *il piano o triangolo di riduzione* ACD *del triangolo* ACB,

356. Nelle operazioni pratiche (Fig. 15.) sul terreno occorre sovente di ridurre le parti di un triangolo da un piano ad un altro. Queste riduzioni possono però risparmiarsi in quelle operazio-

ni in cui le distanze non sono molto grandi, quando lo strumento che si usa ha nel suo cannocchiale quel moto verticale che l' Ab. Toaldo nelle sue tavole trigonometriche (n.99. Ed.II.) indicò per quello di Mayer, cioè che senza smuovere il suo piano dall' orizzonte possa collimare gli oggetti quantunque elevati o depressi (a).

(a) Il Sig. Zahra, mio Maestro ed Amico, Professore di Matematica sublime in questa Università ha fatto colla sua direzione eseguirmi lo strumento di Mayer con questo moto verticale nel suo telescopio; e con un meccanismo sì semplice quanto dovea da' suoi lumi aspettarsi. Quest' Uomo geometra, mi si permetta in tale occasione esclamare, che alle cognizioni profonde della teoria unisce ancora le pratiche, dopo aver corso le parti diverse del continete, dopo aver commerciato co' Dotti primari dell' Europa, per una combinazione accidentale ed a noi fortunata si ridusse fra queste mura. Egli ci ha il vero gusto portato per le scienze esatte. Egli si è compiaciuto più colla voce istruirci che cogli scritti. Egli è stato forse forse per noi ciocchè Talete fu per la Grecia, e Pitagora per le Calabrie. L'opera di questo Molo tante volte ten-

Due casi si possono dare nella riduzione di cui si tratta. L'uno quando il triangolo da ridursi ha comune col piano di riduzione de' uno lati, e l'altro quando vi ha commune uno degli angoli. L'enunciazione proposta non si versa che sul primo solamente de' due casi. E noi li esamineremo ambedue onde rispondere col primo alla demanda enunciata; e compire col secondo tutte le ricerche trigonometriche, che propor si possono su questo argomento.

I. In questo caso la retta *BD* si suppone normale al piano di riduzione, e perciò i triangoli *ADB*, *CED* si suppongono rettangoli. Quì si avverta però che nella pratica quella linea a tutto rigore è obbliqua, ed obbliquangoli sono questi triangoli. Ma noi non ci occupiamo che nella sola parte teorica, e perciò rimandiamo il lettore alla trigonometria piana e sferica del Cagnoli (art. 320. Ed. I.) per più da vicino conoscere il soggetto di questa avvertenza: solo dicendo che per la semplicità delle riduzioni, e per la insensibilità degli errori, anche nella pratica suole quella supposizione adottarsi.

---

tata e mai riuscita, che colle più sublimi vedute della scienza Idraulica oggi vi costruendosi sotto la sua ispezione, forma un argomento pratico sul peso grande e reale del suo vasto sapere.

Ciò posto sia $BAC = a$, $ABC = b$, $ACB = c$; e si avrà da' triangoli ADB, CDB, $BD^2 = BC^2 - CD^2 = AB^2 - AD^2$. Quindi $BC^2 - AB^2 = CD^2 - AD^2$, cioè (l. 768) $2AC . CB . \cos ACB - AC^2$

$$= 2AC . CD . \cos ACD - AC^2$$

e però $\cos ACD = \frac{CB . \cos ACB}{CD} =$ (l. 744)

$\frac{\cos c}{\cos m}$. Quindi $AB^2 - BC^2 = AD^2 - CD^2$, cioè

$2AC . AB . \cos BAC - AC^2 = 2AC . AD . \cos CAD - AC^2$, e però $\cos CAD = \frac{AB \cos BAC}{AD} = \frac{\cos a}{\cos n}$

Trovati i due angoli ACD, CAD sene avrà il terzo $ADC = 180° - (ACD + CAD)$. Per averlo però indipendentemente da essi, si rifletta che i due triangoli ACB, ACD ci danno (l. 767)

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB . BC . \cos b = AD^2 + CD^2 - 2AD . CD . \cos ADC$, e però $\cos ADC =$

$\frac{AB . BC . \cos b - BD^2}{AD . CD} =$ (l. 741. 744)

$\frac{\cos b - \operatorname{sen} m . \operatorname{sen} n}{\cos m . \cos n}$, ovvero operando analoga-

mente al num. (1.813.3°) $\text{sen}\,\frac{1}{2}\,ADC =$

$$\left(\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(b+m-n)\cdot\text{sen}\,\frac{1}{2}(b+n-m)}{\cos m\cdot\cos n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Colla cognizione degli angoli e del lato AC ſene ha prontamente quella degli altri due lati CD, AD ſi ha cioè $CD = \frac{AC\,.\,\text{sen}\,CAD}{\text{sen}\,ADC} =$

$$AC\left(\frac{1-\frac{\cos^2 a}{\cos^2 n}}{1-\left(\frac{\cos b-\text{sen}\,m\,\text{sen}\,n}{\cos m\cos n}\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$AC\cos n\Big((\cos n-\cos a)(\cos n+\cos a):(\cos^2 m\cos^2 n - \text{sen}^2 m\,\text{sen}^2 n+\cos b\,(2\,\text{sen}\,m\,\text{sen}\,n-\cos b)\Big)^{\frac{1}{2}} =$$

(l.709.705, e ſupp. $\frac{\cos b(2\,\text{sen}\,m\,\text{sen}\,n-\cos b)}{\cos(m+n)\cos(m-n)} = \tan^2 u$)

$$AC \cos m \cos u \left(\frac{\operatorname{sen}(a+n) \operatorname{sen}(a-n)}{\cos(m+n) \cos(m-n)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

e similmente $AD = \frac{AC \operatorname{sen} ACD}{\operatorname{sen} ADC} =$

$$AC \cos n \cos u \left(\frac{\operatorname{sen}(c+m) \operatorname{sen}(c-m)}{\cos(m+n) \cos(m-n)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

II. Sia RAr il triangolo (Fig. 16) da ridursi al piano EAP, su di cui si appoggia coll'angolo A. Riguardando le rette ER, er normali al piano di riduzione, e perciò a tutte le linee che in esso le incontrano, si avrà da' triangoli rettangoli AER, Aer, $ER = AR \operatorname{sen} EAR$, $er = Ar \operatorname{sen} eAr$; da' triangoli simili EPR, ePr

$$\frac{PR}{Pr} = \frac{ER}{er} = \frac{AR \operatorname{sen} EAR}{Ar \operatorname{sen} eAr};$$

da' triangoli APR, APr, $\operatorname{sen} APR =$

$$\frac{AR \operatorname{sen} PAR}{PR} = \frac{Ar \operatorname{sen} PAr}{Pr}.$$

Quindi $\operatorname{sen} PAR \operatorname{sen} eAr = \operatorname{sen} PAr \operatorname{sen} EAR$, cioè $\operatorname{sen} PAR : \operatorname{sen} PAr :: \operatorname{sen} EAR : \operatorname{sen} eAr$.

Quindi (l. 802) $\tan\frac{1}{2}(PAR+PAr)=$

$\tan\frac{1}{2}RAr\tan\frac{1}{2}(EAR+eAr)\cot\frac{1}{2}(EAR-eAr)$.

Quindi fatto $PAR+PAr=v$, sarà $PAr=$

$\frac{1}{2}(v-RAr)$, e $PAR=\frac{1}{2}(v+RAr)$.

Quindi (n. I.) $\cos EAP=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(v+RAr)}{\cos EAR}$, $\cos eAP=$

$\dfrac{\cos\frac{1}{2}(v-RAr)}{\cos eAr}$.

Quindi finalmente conosciuti gli angoli EAP, eAP, si conoscerà $EAe=EAP-eAP$.

237. Dippiù i triangoli EPR, ePr ci danno $PR:Pr::Er:er$, e però $PR-Pr:PR::ER-er:ER$, cioè $Rr:ER-er::1:\text{sen}\,EPR$. Quindi di $\text{sen}\,EPR=\dfrac{ER-er}{Rr}$

$=\dfrac{AR\,\text{sen}\,EAR-Ar\,\text{sen}\,eAr}{Rr}$.

$$= \frac{\text{sen } ArR \text{ sen } EAR - \text{sen } ARr \text{ sen } eAr}{\text{sen } RAr}$$

Quindi (336.) I $\cos AEP =$

$\frac{\cos ARP - \text{sen } EPR \text{ sen } EAR}{\cos EPR \cos EAR}$, ovvero

$\text{sen } \frac{1}{2} AEP = \frac{1}{\sqrt{\cos EPR \cos EAR}} \sqrt{\text{sen } \frac{1}{2} (ARP}$

$\overline{+ EPR - EAR) \text{ sen } \frac{1}{2} (ARP + EAR - EPR)}$

Quindi $\cos AeP = \frac{\cos ArR - \text{sen } EPR \text{ sen } eAr}{\cos EPR \cos eAr}$, cioè

$\text{sen } \frac{1}{2} AeP = \frac{1}{\sqrt{\cos EPR \cos eAr}} \sqrt{\text{sen } \frac{1}{2} (ArP}$

$\overline{+ EPR - eAr) \text{ sen } \frac{1}{2} (ArP + eAr - EPR)}$

Quindi essendo conosciuto AeP, si avrà $AeE =$ $180^o - AeP$.

338. Dippiù finalmente i triangoli rettangoli EAR, eAr ci danno $AE = AR$ sen EAR, $Ae =$ Ar sen eAr; e i triangoli simili EPR, ePr ci danno $Ee = \frac{EP\ Rr}{PR} = Rr \cos EPR$.

Tutto il meccanismo adunque di questo secondo esame non consiste che a ridurlo alle circostanze ed alle formule del primo.

339. Abbiamo diggià veduto la riduzione di un triangolo da un piano ad un altro in tutti i casi, cui può portarci la pratica. Ed abbiamo perciò soddisfatto non solo alle domande dell' enunciazione proposta, ma a quelle ancora in cui essa ci ha potuto impegnare. Adempito quindi con questa esposizione quanto questo problema potea domandare; e perciò compito il dettaglio di quelle teorie, che la prima trigonometria ci ha potuto interessar da vicino, passiamo ad esporne quelle altre che la seconda comprende ne'più ristretti confini de' quì appresso problemi.

Teorie esposte sotto l' enunciazione de' problemi proposti al fine della Trigonometria sferica.

PROB. 1.

CErco se la differenza che possono aver tra loro i due angoli obliqui di un triangolo sferico rettangolo abbia alcun limite in più e qual sia.

340. Per venire a capo di questa risposta (Fig.108.) ricorro a' numeri (l.791.792). Dal secondo di essi ho $ED = 180° - C$, $DF = 180° - B$, $EF = 180° - A$, e dal primo ne ho $DF + EF > ED$, $EF + ED > DF$. Quindi sarà $A + B - C < 180°$, $A + C - B > 180°$, cioè esprimendo in una formula questi due casi sarà $A \pm B \mp C < 180°$. Or se il triangolo proposto ABC è rettangolo in A, questa espressione diviene $\pm B \mp C$, cioè $B \backsim C < 90°$.

341. Nella maniera medesima le ineguaglianze $DF + ED > EF$, $DF + EF < ED$, ci danno $B \mp A \pm C < 180°$, e le $DF + ED > EF$, $EF + ED > DF$, ci danno $C \mp A \pm B < 180°$, dalle quali se B o C è un angolo retto sarà sempre $A \backsim C < 90°$, o $A \backsim B < 90°$. Quindi 90° è il limite cercato fra gli angoli obliqui di un triangolo sferico rettangolo.

PROB 2:

Data in un triangolo sferico rettangolo la somma e la differenza dell' ipotenusa h *e di un lato* g, *e dato l'angolo adjacente* a, *determinare* h, *e* g.

342. Dal numero (l.817) abbiamo 1 : cos a :: tan h : tan g, e però 1+ cos a : 1 − cos a :: tan h+tan g : tan h −tan g, cioè

$$\frac{1-\cos a}{1+\cos a} = \tan^2\frac{a}{2} = \frac{\tan h-\tan g}{\tan h+\tan g} = \frac{\operatorname{sen} h \cos g - \operatorname{sen} g \cos h}{\operatorname{sen} h \cos g + \operatorname{sen} g \cos h} = \frac{\operatorname{sen}(h-g)}{\operatorname{sen}(h+g)}.$$

Quindi

$\operatorname{sen}(h-g) = \tan^2\frac{1}{2}a \operatorname{sen}(h+g)$ o $\operatorname{sen}(h+g) = \tan^2\frac{1}{2}a \operatorname{sen}(h-g)$: donde $h = \frac{1}{2}(h+g) + \frac{1}{2}(h-g)$, e $g = \frac{1}{2}(h+g) - \frac{1}{2}(h-g)$

343. In un triangolo sferico rettangolo quantunque l'ipotenusa (l.797) può essere minore, eguale, o maggiore di un lato obliquo, frattanto i valori di h, g sempre sussistono qual noi l'abbiam preso, qualunque sia il loro stato relativo. Infatti essendo sempre $h-g < 180°$, può essere

$h+g>180°$, e perciò il valore di sen $(h-g)$ potendo risultar negativo ci mostra che $h-g$ è negativo, cioè che $g>h$. In questo caso che è quello solo in cui i detti valori si dovrebbero prendere oppostamente, il segno negativo di $h-g$ corregge il tutto; mutando il segno positivo in negativo in quello di h, ed il negativo in positivo in quello di g.

PROB. 3.

Due triangoli sferici ABD, DBE *rettangoli in* A *ed in* E *han l'ipotenusa comune* BD: *Si cerca il rapporto de' loro lati ed angoli obliqui*.

344. Per rispondere a quanto cisi propone in questo problema non bisogna ricorrere che a' numeri (l. 837. 845). Da essi abbiamo prontamente

$$\cos BD = \cos AB \cos AD = \cos EB \cos ED$$

$$\cos BD = \tan ADB \tan ABD = \tan EDB \tan EBD$$

che sono le due formule con cui l'autore delle lezioni pretende rispondere alle due enunciate domande: ho detto pretende rispondere, e non risponde; in quanto esse non ci danno che il rapporto fra i coseni de' lati, e le tangenti degli angoli in questione: rapporto molto diverso di quello che realmente da esse domandasi fra questi lati, e quest' angoli.

PROB. 4.

Dati i triangoli A, B, C *di un triangolo sferico trovarne la superficie.*

345. Sia aBc il triangolo di cui se ne vuole la superficie. Si continui uno de' lati, come ac, per tutta la circonferenza $acAC$ onde rappresenti la base della semi-sfera, cui questo triangolo appartiene. Si continuano egualmente gli altri due lati Bc, Ba nella superficie della semisfera inferiore fino all' incontro nel punto b; e si chiamino S, $S1$, $S2$, $S3$ le superficie del triangolo in questione aBc, e de' triangoli abc, AcB, BaC. Ciò posto il triangolo $abc = ABC$, poichè $ac = acA - Ac = cAC - Ac, = AC, cb = bcB - Bc = cBC - cB = BC$, ed $ab = baB - aB = aBA - aB = AB$. La superficie h di un fuso della sfera, il di cui numero di gradi è k, è chiaramente

$$h = \frac{4cr^2}{360^0} k^0 = \frac{4cr^2 k}{2cr} \text{arc.} 1^0 = 2rk.\text{arc.} 1^0,$$ cioè

la superficie di un fuso qualunque dipende dall' angolo che lo determina. Quindi veggo facilmente che le superficie de' tre fusi $aBcba$, $aACa$, $acCa$ dipendendo da' tre angoli dati B, a, c; e contenendo quella del triangolo dato ci portano prontamente al risultato cercato. Infatti essendo

$aBcb^a = S + S_1 = 2Br$ arc. 1°, $aAca = S + S_2 = 2ar$ arc. 1°, $acCa = S + S_3 = 2br$ arc. 1°, sarà $3S + S_1 + S_2 + S_3$ $(= 2S + 2r\ 180°) = 2r(B + a + b)$ arc. 1°: donde $S = r\,(B + a + b - 180)$ arc. 1°. Se gli angoli sono dati in minuti o in secondi, allora sarà $S = r(B + a + b - 10800)$ arc. 1′ $= r\,(B + a + b - 648000)$ arc. 1″.

346 Questa espressione ci convinge che la superficie cercata eguaglia la differenza tra la somma degli angoli e 180°, e però che essa dipende da questa somma. Quindi conoscendo i lati del triangolo in vece degli angoli, allora volendo la superficie in questione espressa da' lati basta trovar la somma degli angoli in funzione di questi medesimi lati.

Infatti sia q la semisomma de' lati g, g', g'' opposti agli angoli a, B, b del triangolo di cui si tratta e si avrà

$$\cos\frac{1}{2}(a+B+b) = \cos\frac{1}{2}(a+B)\cos\frac{b}{2} - $$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+B)\operatorname{sen}\frac{1}{2}b = \cos\frac{1}{2}b\left(\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}B - \right.$$

$$\left.\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}B\right) - \operatorname{sen}\frac{1}{2}b\left(\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}B + \right.$$

$$\left.\operatorname{sen}\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}a\right) = (1.861)$$

$$\sqrt{\frac{\text{sen}^2 q\ \text{sen}(q-g)\,\text{sen}(q-g')\ \text{sen}(q-g'')}{\text{sen}^2 g\ \text{sen}^2 g'\,\text{sen}^2 g''}} =$$

$$\sqrt{\frac{\text{sen}\, q.\ \text{sen}^2(q-g'')\,\text{sen}(q-g)\ \text{sen}(q-g')\,\text{sen}(q-g'')}{\text{sen}^2 g\ \text{sen}^2 g'\ \text{sen}^2 g''}} =$$

$$\sqrt{\frac{\text{sen}\, q\ \text{sen}^2(q-g')\ \text{sen}(q-g)\,\text{sen}(q-g')\,\text{sen}(q-g'')}{\text{sen}^2 g\ \text{sen}^2 g'\,\text{sen}^2 g''}} =$$

$$\sqrt{\frac{\text{sen}\, q\,\text{sen}^2(q-g)\,\text{sen}(q-g)\,\text{sen}(q-g')\,\text{sen}(q-g'')}{\text{sen}^2 g\ \text{sen}^2 g'\,\text{sen}^2 g''}} =$$

$$(\text{sen}\, q - \text{sen}(q-g) - \text{sen}(q-g') - \text{sen}(q-g''))\ \frac{\sqrt{\text{sen}\, q\ \text{sen}(q-g)\ \text{sen}(q-g')\ \text{sen}(q-g'')}}{\text{sen}\, g\ \text{sen}\, g'\ \text{sen}\, g''}$$

$$=(\text{l}.709)\ 2\,\text{sen}\,\frac{g}{2}\ \{\cos\frac{g'+g''}{2} - \cos\frac{g'-g''}{2}\}\ \frac{\sqrt{\text{sen}\, q\ \text{sen}(q-g)\,\text{sen}(q-g')\,\text{sen}(q-g'')}}{\text{sen}\, g\ \text{sen}\, g'\,\text{sen}\, g''} =$$

$$= -\frac{4\,\text{sen}\,\frac{1}{2}g\ \text{sen}\,\frac{1}{2}g\ \text{sen}\,\frac{1}{2}g''}{\text{sen}\, g\ \text{sen}\, g'\ \text{sen}\, g''}\sqrt{\text{sen}\, q\ \text{sen}(q-g)\,\text{sen}(q-g')\ \text{sen}(q-g'')} = (\text{l}.705)$$

$$-\frac{\sqrt{\operatorname{sen} q \operatorname{sen}(q-g)\operatorname{sen}(q-g')\operatorname{sen}(q-g'')}}{2\cos\frac{1}{2}g\cos\frac{1}{2}g'\cos\frac{1}{2}g''}.$$

Fin quì la soluzione la debbo al Gagnoli (trig. piana e sferica 1146: Ed. II.)

347. Per dedurre da questa espressione di $\cos\frac{1}{2}(a+B+b)$ quella di $\tan\frac{1}{2}(a+B+b)$ per cui si arriva prontamente a quell' altra che l' autore delle lezioni dà nella quinta sua Edizione; io osservo che

$$\operatorname{sen} q \operatorname{sen}(q-g) = \operatorname{sen}\frac{1}{2}(g+g'+g'') \operatorname{sen}\frac{1}{2}(g'+g''-$$

$$= (1.709)\ \frac{1}{2}(\cos g - \cos(g'+g'')) = \frac{1}{2}(\cos g -$$

$$\cos g' \cos g'' + \operatorname{sen} g' \operatorname{sen} g'')$$

e che $\operatorname{sen}(q-g')\operatorname{sen}(q-g'') = \operatorname{sen}\frac{1}{2}(g+g''-$

$$g')\operatorname{sen}\frac{1}{2}(g+g'-g'') = (1.709)\ \frac{1}{2}(\cos(g''-g') -$$

$$\cos g) = -\frac{1}{2}(\cos g' \cos g'' + \operatorname{sen} g' \operatorname{sen} g'' - \cos g)$$

Quindi $\operatorname{sen} q \operatorname{sen}(q-g) \operatorname{sen}(q-g') \operatorname{sen}(q-g'') =$
$\frac{1}{4}(1-\cos^2 g - \cos^2 g' - \cos^2 g'' + 2\cos g \cos g' \cos g'')$

e perciò $\cos^2 \frac{1}{2}(a+B+b) =$

$$\frac{\operatorname{sen} q \operatorname{sen}(q-g) \operatorname{sen}(q-g') \operatorname{sen}(q-g'')}{4\cos^2 \frac{1}{2}g \cos^2 \frac{1}{2}g' \cos^2 \frac{1}{2}g''} = \text{(l. 708)}$$

$$\frac{2\operatorname{sen} q \operatorname{sen}(q-g) \operatorname{sen}(q-g') \operatorname{sen}(q-g'')}{(1+\cos g)(1+\cos g')(1+\cos g'')} =$$

$$\frac{1-\cos^2 g - \cos^2 g' - \cos^2 g'' + 2\cos g \cos g' \cos g''}{(1+\cos g)(1+\cos g')(1+\cos g'')}$$

348. Questo valore di $\cos^2 \frac{1}{2}(a+B+b)$ ci porta a quello di $\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}(a+B+b) =$

$\frac{(1+\cos g+\cos g'+\cos g'')^2}{2(1+\cos g)(1+\cos g')(1+\cos g'')}$, e quindi a quello di $\tan \frac{1}{2}(a+B+b) = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a+B+b)}{\cos \frac{1}{2}(a+B+b)} =$

$$\frac{1+\cos g+\cos g'+\cos g''}{2\sqrt{\operatorname{sen} q\,\operatorname{sen}(q-g)\operatorname{sen}(q-g')\operatorname{sen}(q-g'')}},\ \text{o} = \text{ec.}$$

espressioni meno comode al calcolo numerico della (346) onde avere il valore della semisomma degli angoli del triangolo in questione.

349. Diviso S per r si avrà espressa in gradi la superficie di cui si tratta, si avrà cioè

$S^o = \frac{1}{2}(a^o + B^o + b^o - 180^o)$, e quindi

$$\tan\frac{1}{2}S^o = \tan\frac{1}{2}(a+B+b-180^o) = -\tan(90^o - \frac{1}{2}(a^o+B^o+b^o)) = (1.704) - \cot\frac{1}{2}(a^o+B^o+b^o) = -\frac{1}{\tan\frac{1}{2}(a^o+B^o+b^o)} =$$

$$\frac{2\sqrt{\operatorname{sen} q\,\operatorname{sen}(q-g)\operatorname{sen}(q-g')\operatorname{sen}(q-g'')}}{1+\cos g+\cos g'+\cos g''} =$$

$$\frac{2\sqrt{(1-\cos^2 g-\cos^2 g'-\cos^2 g''+2\cos g\cos g'\cos g'')}}{1+\cos g+\cos g'+\cos g''}$$

Questa è l'espressione della tangente della metà dell'arco che moltiplicato pel raggio dà la superficie cercata, e che nella quinta Edizione delle lezioni si dà per risultato della seconda parte di questo problema. Il Degua in una memoria dell'Accademia delle scienze (an. 1783. pag. 357),

quello che ci ha dato forse il primo questa espressione, sebbene per una strada molto diversa, ed assai più laboriosa. Per convincerci della semplicità della nostra soluzione in faccia a quella del Degna, io soggiungo qui di passaggio che egli calcola il valor di $\cos S = \cos(a + B + b - 180^\circ) = -\cos(a + B + b)$ mercè le formule (l. 703. 861), ed arriva ad un rotto il cui numeratore contiene 35 termini, ed il denominatore $= (1 - \cos^2 g)(1 - \cos^2 g')(1 - \cos^2 g'')$. Quindi egli si avvidde fortunatamente che quell'immenso numeratore avea col denominatore il fattor commune $(1 - \cos g)(1 - \cos g')(1 - \cos g'')$, e trovò il campo onde ridurre quel rotto ad una più semplice espressione. Quindi ottenne con essa i valori di $1 + \cos S$, di $1 - \cos S$; onde finalmente quello di

$$\cot.\frac{1}{2}S = \frac{1}{\tan\frac{1}{2}S} = \sqrt{\frac{1 + \cos S}{1 - \cos S}}.$$

350. Pria di por fine a questo tratto io voglio rettificare, o piùtosto dilucidare una notizia istorica che il Cagnoli dà in senso molto equivoco. Nel secondo volume delle opere di Vallis (Oxford. 1693. p. 875) si vede inserito un Sag-

gio di trigonometria piana e sferica' di Giovanni Casvvel. Questo autore in questo Saggio, è l'istorico delle Matematiche sul prin. del II. volume dell' ultima Edizione della sua storia; ci dicono, che Alberto Girard ed il P. Cavalieri sono gli autori di quella semplice soluzione con cui (345) abbiamo arrivato ad esprimere la superficie cercata in funzione degli angoli. Quindi l'espressione del Cagnoli „ questa espressione semplicissima è „presa da Vallis,, non dee farci attribuire a Vallis quel teorema, ma dee riguardarsi piuttosto come un argomento onde dirigerci alle opere del geometra Inglese.

PROB. 5.

I poli di due Circoli AD, AC *son* T, P, *e condotti da essi per un punto dato* S *della superficie sferica gli archi* PSE, TSB, PTC *si trova* TC $=l$, SE $=f$, BD $=z$. *Si cerca il valor di* SB $=a$.

351. Essendo dati (Fig. 118.) gli archi *TC*, *SE*, *BD* saranno ancor dati nel triangolo *PTS* le parti $PT = 90^o - l$, $PS = 90^o - f$, $PTS = 180^o - z$. Quindi (l. 859) $\cos PS = \operatorname{sen} PT \operatorname{sen} TS \cos PTS + \cos PT \cos TS$; in cui mettendo i valori corrispondenti si avrà $\operatorname{sen} f = \operatorname{sen} l \operatorname{sen} a - \cos l \cos a \cos z$, e

$\cos l \cdot \cos z \sqrt{(1 - \operatorname{sen}^2 a)} = \operatorname{sen} l \cdot \operatorname{sen} a - \operatorname{sen} f$.

Quadrando questa equazione, e riducendo quindi col riguardare $\text{sen}\,a$ come incognita, si troverà

$$\text{sen}^2 a - \frac{2\,\text{sen}\,l\,\text{sen}\,f}{\text{sen}^2 l + \cos^2 l.\cos^2 z}\,\text{sen}\,a = \frac{\cos^2 l.\cos^2 z - \text{sen}^2 f}{\text{sen}^2 l + \cos^2 l\,\cos^2 z}$$, ovvero

$$\text{sen}^2 a - \frac{2\,\text{sen}\,l\,\text{sen}\,f}{1 - \cos^2 l\,\text{sen}^2 z}\,\text{sen}\,a = \frac{\cos^2 l\,\cos^2 z - \text{sen}^2 f}{1 - \cos^2 l\,\text{sen}^2 z}$$. Risolvendo finalmente questa equazione giusta i metodi ordinarj dell' analisi, sene avrà

$$\text{sen}\,a = \frac{\text{sen}\,l\,\text{sen}\,f}{1 - \cos^2 l\,\text{sen}^2 z} \pm \left(\frac{\cos^2 l\,\cos^2 z - \text{sen}^2 f}{1 - \cos^2 l\,\text{sen}^2 z} + \frac{\text{sen}^2 l\,\text{sen}^2 f}{(1 - \cos^2 l\,\text{sen}^2 z)^2}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{\text{sen}\,l\,\text{sen}\,f}{1 - \cos^2 l\,\cos^2 z} \pm \frac{1}{1 - \cos^2 l\,\text{sen}^2 z}\left(\cos^2 l\,\cos^2 z\right.$$

$$-\text{sen}^2 f)(1 - \text{cos}^2 l\,\text{sen}^2 z) + \text{sen}^2 l\,\text{sen}^2 f)^{\frac{1}{2}}\Big) =$$

$$\frac{1}{1-\text{cos}^2 l\,\text{sen}^2 z}\Big(\text{sen}\,l\,\text{sen}\,f \pm (\text{cos}^2 l\,\text{cos}^2 z -$$

$$\text{sen}^2 f - \text{cos}^4 l\,\text{cos}^2 z\,\text{sen}^2 z + \text{cos}^2 l\,\text{sen}^2 z\,\text{sen}^2 f +$$

$$\text{sen}^2 l\,\text{sen}^2 f)^{\frac{1}{2}}\Big) =$$

$$\frac{1}{1-\text{cos}^2 l\,\text{sen}^2 z}\Big(\text{sen}\,l\,\text{sen}\,f \pm (\text{cos}^2 l\,\text{cos}^2 z -$$

$$\text{sen}^2 f - \text{cos}^4 l\,\text{cos}^2 z\,\text{sen}^2 z + \text{cos}^2 l\,\text{sen}^2 f(1-\text{cos}^2 z)$$

$$+\text{sen}^2 f(1-\text{cos}^2 l))^{\frac{1}{2}}\Big) =$$

$$\frac{1}{1-\text{cos}^2 l\,\text{sen}^2 z}\Big(\text{sen}\,l\,\text{sen}\,f \pm (\text{cos}^2 l\,\text{cos}^2 z -$$

$$\text{cos}^4 l\,\text{cos}^2 z\,\text{sen}^2 z - \text{cos}^2 l\,\text{cos}^2 z\,\text{sen}^2 f)^{\frac{1}{2}}\Big) =$$

$$\frac{1}{1-\cos^2 l\,\text{sen}^2 z}\left(\text{sen}\, l\,\text{sen}\,(f \pm \cos^2 l \cos^2 z\,(1 - \text{sen}^2 f - \cos^4 l \cos^2 z\,\text{sen}^2 z)^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$\frac{1}{1-\cos^2 l\,\text{sen}^2 z}\left(\text{sen}\, l\,\text{sen}\, f \pm (\cos^2 l \cos^2 z\,\text{co}^2 f - \cos^4 l \cos^2 z\,\text{sen}^2 z)^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$\frac{1}{1-\cos^2 l\,\text{sen}^2 z}\left(\text{sen}\, l\,\text{sen}\, f \pm \cos l \cos z\,(\cos^2 f - \cos^2 l\,\text{sen}^2 z)^{\frac{1}{2}}\right)$$

PROB. 6.

E' ignota l' inclinazione di due circoli (l. Fig. 118) AC, AD *o sia la distanza de' poli* P, T: *solo si sà che condotti da* P, T *per un dato punto* S *della superficie sferica gli archi* PSE, TSB, PTD, *si ha* EC = SPT, = *h*, SB = a, BD = z. *Cercasi di determinar* TC = l.

552. Per la proprietà de' poli abbiamo *TS* = 90° − *a*, e PTS = 180° − *z*. Conoscendosi quindi nel triangolo *PTS* gli angoli *SPT*, *PTS*, col la-

to TS ſene avrà $PT = 90^o - l$ e però l. Infatti (l.855) abbiamo

$$\tan TS = \frac{\operatorname{sen} PT}{\cos PTS \cos PT + \operatorname{sen} PTS \cot PTS}, \text{ o}$$

$$\cot a = \frac{\cos l}{\operatorname{sen} z \cot h - \cos z \operatorname{sen} l}: \text{ donde si ha}$$

$$\tan a (1 - \operatorname{sen}^2 l)^{\frac{1}{2}} = \operatorname{sen} z \cot h - \cos z \operatorname{sen} l.$$

Quadrando questa equazione, e risolvendola quindi per l' incognita ſen l ſene avrà ſen $l =$

$$\frac{\operatorname{sen} z \cos z \cot h}{\tan^2 a + \cos^2 z} \pm \left(\frac{\tan^2 a - \operatorname{sen}^2 z \cot^2 h}{\tan^2 a + \cos^2 z} + \frac{\operatorname{sen}^2 z \cos^2 z \cot^2 h}{(\tan^2 a + \cos^2 z)^2} \right)^{\frac{1}{2}} = (\text{l. }705)$$

$$\frac{1}{\tan^2 a + \cos^2 z} \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2z \cot h \pm (\tan^4 a - \tan^2 a \operatorname{sen}^2 z \cot^2 h + \tan^2 a \cos^2 z)^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$\frac{1}{\tan^2 a + \cos^2 z}\left(\frac{1}{2}\,\text{sen}\,2z\cot h \pm \tan a(\tan^2 a -\right.$$

$$\left.\text{sen}^2 z\cot^2 h + \cos^2 z)^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$\frac{1}{\tan^2 a + \cos^2 z}\left(\frac{\text{sen}\,2z\cos h}{2\,\text{sen}\,h} \pm \frac{\tan a}{\cos a}(\text{sen}^2 a -\right.$$

$$\left.\text{sen}^2 z\cos^2 a\cot^2 h + \cos^2 a\cos^2 z)^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$\frac{1}{2\,\text{sen}\,h\cos a(\tan^2 a + \cos^2 z)}\left(\text{sen}\,2z\cos h\cos a \pm\right.$$

$$\left.2\tan a\,(1 - \text{sen}^2 z\cos^2 a(1 + \cot^2 h))^{\frac{1}{2}}\,\text{sen}\,h\right) =$$

$$\frac{1}{2\,\text{sen}\,h\cos a(\tan^2 a + \cos^2 z)}\left(\text{sen}\,2z\cos h\cos a \pm\right.$$

$$\left.2\tan a(\,\text{sen}^2 h - \text{sen}^2 z\cos^2 a)^{\frac{1}{2}}\right)$$

PROB 7.

Da'poli (1.Fig.118) P,T *di due dati circoli* AC, AD *la cui inclinazione è* CAD = i, *conduco per un dato punto* S *gli archi* PSE, TSB. *Supposto che siano dati* AB = *m*, BS = *a*; *cerco* AE = L, *ed* ES = f.

353. I poli de'circoli massimi non essendo che i punti che i loro assi marcano sulla superficie della sfera, cui appartengono, ne avviene che la distanza de' poli di due di questi circoli è sempre eguale al loro angolo d'inclinazione. Quindi sarà $PT = i$.

Inoltre il punto A commune a' cerchj AC, AD è 90° distante da' punti P, T, e perciò è il polo di TPD. Quindi l'arco BD' che misura l'angolo $PTS = 90° + AB = 90° + m$, e $CE = TPS = 90° - L$. Conoscendo adunque nel triangolo PTS i lati $PT = i$, $TS = 90° - a$, coll'angolo compreso $PTS = 90° + m$, si avrà (l. 860) $\tan TPS = \dfrac{\text{sen}\, PTS}{\text{sen}\, PT \cdot \cot TS - \cos PT \cdot \cos PTS}$, ovvero

$$\cot E = \frac{1}{\tan L} = \frac{\cos m}{\tan a\ \text{sen}\ i + \text{sen}\ m \cos i},$$

cioè $\tan L = \dfrac{\tan a\ \text{sen}\ i + \text{sen}\ m \cos i}{\cos m}$

Inoltre (l. 859) si avrà

$\cos PS = \text{sen}\ PT\ \text{sen}\ TS \cos PTS + \cos PT \cos TS$,

ovvero $\text{sen}\ f = \text{sen}\ a \cos i - \text{sen}\ i \cos a\ \text{sen}\ m$

Questo è i due problemi precedenti appartengono all'Astronomia sferica. Si potran vedere e-

nunciati in linguaggio Astronomico nelle lezioni di fisica matematica degli Editori Fiorentini a' numeri (644.653.656.650)

PROB. 8.

Dato un picciolo arco di parallelo CnE $=$ n, *e data la sua distanza* ED $=$ p *dal polo* D *trovar la differenza* $=$ e *dell'angolo* nED $= 90°$ *dall'angolo* mED *fatto dall'arco* CmE $=$ m *del cerchio massimo che passa per gli stessi punti* C, E.

354. Per essere *D* (I.Fig.119.) il polo dell'arco dato *CnE*, sarà *DC* $=$ *DE*, e però isoscile il triangolo *CDE*. Quindi immaginando per *D* sopra *CmE* un arco normale si avrà il triangolo *CDE* diviso per metà, e si avrà perciò (I.841)

$\cos mED = \tan \frac{m}{2} \cot DE$; la quale per essere

$e = nED - mED = 90° - mED$, cioè $mED = 90° - e$

ci dà $\operatorname{sen} e = \tan \frac{1}{2} m \cot DE$. Quindi essendo

sempre assai piccolo $\frac{1}{2} m$, ed e si avrà $e =$

$\frac{1}{2} m \cot p$

255 Quest' espressione dell' errore domandato dipende da m e non mai da n, che è la quantità da noi conosciuta. Quindi (l. Fig. 105) bisogna determinare m per n. In effetto i raggi cb, cd del cerchio minore bd supposti normali all' asse AE, saranno paralleli alli CB, CD del cerchio massimo BD, e daranno perciò $bcd = BCD$, e l'arco bd dello stesso numero di gradi di BD. Quindi $BD (= BAD) : bd :: CB (= 1) : cb (= \text{sen } p)$, cioè $bd = BAD \text{ sen } p$, cioè (l. fig. 119) $CnE = CDE \text{ sen } p$: ma il triangolo isoscile $CDEm$ ci dà (l. 816) $\text{sen } \frac{1}{2} m = \text{sen } \frac{1}{2} CDE \text{ sen } p$, dunque $\text{sen } \frac{1}{2} CDE =$

$$\text{sen } \frac{CnE}{2 \text{ sen } p} = \text{sen } \frac{n}{2 \text{ sen } p} = \frac{\text{sen } \frac{1}{2} m}{\text{sen } p}, \text{ donde}$$

$$\text{sen } \frac{1}{2} m = \frac{\text{sen } p}{\text{sen } n : 2 \text{ sen } p}, \ \cos \frac{1}{2} m =$$

$$\frac{\sqrt{(\text{sen}^2 n : 2 \text{ sen } p - \text{sen}^2 p)}}{\text{sen } n : 2 \text{ sen } p},$$

$$\tan \frac{1}{2} m = \frac{\text{sen}\, p}{\sqrt{(\text{sen}^2 n : 2\,\text{sen}\, p - \text{sen}^2 p)}}$$. Quindi

$$\text{sen}\, e = \frac{\cos p}{\sqrt{(\text{sen}^2 n : 2\,\text{sen}\, p - \text{sen}^2 p)}}$$. Questa formula ci dà a tutto rigore l'errore cercato.

356. La valutazione però di m in n che abbiamo eseguita è dell' intutto superflua ne' casi ordinarj in cui l' angolo al polo CDE non suole oltrepassare 1° 30' e ciò perchè non differiscono sensibilmente l'uno dall' altro. Quindi possiamo servirci della sen $e = \tan \frac{m}{2} \cot p$; oppure della $e = \frac{1}{2} m \cot p$. Una pruova di questa afferzione può aversi dall' equazione

$$\frac{\frac{1}{2} CDE}{\text{sen}\, \frac{1}{2} CDE} = \frac{\frac{1}{2} n}{\text{sen}\, \frac{1}{2} m}$$,

che si ha col prendere il valore di sen p dalle due altre che ci guidarono alla valutazione di

tan $\frac{m}{2}$ poichè per quanto abbiamo riflettuto (310) $\frac{1}{2}$ *CDE* può prendersi per sen $\frac{1}{2}$ *CDE* fintanto che *CDE* $<$ 2°. Un applicazione poi della già espo sta teoria l' abbiamo nel problema seguente.

PROB. 9.

Supposto (I. Fig. 121) *che passino per gli stessi punti* D, B *un arco di cerchio massimo* DmB *e un arco di paralle le* DnB = b = 1°8′ *la cui distanza dal polo* C *sia* BC = p = 56°15′; *e che inoltre nel picciolissimo triangolo sferico* DnBM *sia dato MB* = c = 2°10′. *Poichè trattando questo triang come rettilineo si calcola piuttosto l'arco* DmB (*come più vicino alla corda comune*) *che* DnB, *e l'angolo* mBM *non è più* = 90°, *si cerca* I. *la misura vera di quest' angolo* a, II. *condotto so pra* DmB *il vero arco normale* Mm *si cerca l' arco intercetto* Bm.

357 I. In questo caso, in cui l'angolo al po lo $<$ 1°30′ possiamo prendere *DmB* per *DnB*, e perciò possiamo senza errore sensibile adottare la formula $e = \frac{1}{2} m \cot p$, onde averne l' errore sul l' angolo *a*. Calcolando questa formola colle date

in questione si avrà $e = 22' 43'', 08$, e quindi l'angolo cercato $a = 90° - e = 89° 37' 16'', 92$.

II. Si conduca sopra DmB il vero arco normale Mm, onde si avrà il triangolo rettangolo MmB, che attesa la sua picciolezza può riguardarsi come rettilineo. Quindi abbiamo $mBM + mMB = 90° = mBM + mBn$, cioè $mMB = mBn = 90° - a = e$. Conosciuto quest'angolo si conoscerà la correzione mB dal triangolo mMB, cioè dall' equazione $mB = c \cdot \cos a = c \operatorname{sen} mMB$, si avrà nel caso nostro $mB = 0° 0' 51'' 32'''$.

Supposto $c = 1'$, $mMB = 1'$ si avrà $mB = 0'', 01745$, e perciò essendo mMB sempre picciolo, si avrà $mB = 0'', 01745 \cdot c \cdot mMB$ per la formula generale, onde esprimere con sensibile esattezza il valor di mB in tutti i casi; formula che per le date di questo caso ci dà $mB = 51'' 32'''$ come sopra. L'autore delle lezioni dà (l. 864) $mB = 51' 32''$ per risultato: locchè attribuisco ad un errore dell' Edizione.

PROB. 10.

In un picciolissimo triangolo sferico di cui si hanno l'ipotenusa h *e un lato* g, *si è trovato* g' *colle formule de' triangoli rettilinei. Cerco l'errore* e *commesso nel valutarlo.*

358. Riguardando per sferico il triangolo in

questione, come è realmente, si avrà (I.S37)
$\cos h = \cos g \cos g'$ cioè (I.727)

$$1 - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{24}h^4 \text{ec.} = \left(1 - \frac{1}{2}g^2 + \frac{1}{24}g^4 \text{ec.}\right)\left(1 - \frac{1}{2}g'^2 + \frac{1}{24}g'^4 \text{ ec}\right)$$

. Eseguendo la moltiplicazione indicata, ed omettendo i termini, in cui si contengono più di quattro dimensioni delle quantità in questione, perchè assai piccioli, si avrà $h^2 = g^2 + g'^2 + \frac{h^4 - g^4 - g'^4}{12} - \frac{1}{2}g^2 g'^2$,

Quadrando questa equazione e trattenendo come sopra sino i termini con quattro dimensioni, si avrà sensibilmente $h^4 = g^4 + 2g^2 g'^2 + g'^4$, valore che sostituito in essa ci dà

$$h^2 - g^2 = g'^2\left(1 - \frac{1}{3}g^2\right); \text{ donde } g' = \frac{\sqrt{(h^2 - g^2)}}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{3}g^2\right)}}$$

sviluppando in serie $\sqrt{\left(1 - \frac{1}{3}g^2\right)}$ coll' omissione de' soliti termini, si avrà $\sqrt{\left(1 - \frac{1}{3}g^2\right)} = 1 - \frac{g^2}{6}$ e quindi $g' = \frac{\sqrt{(h^2 - g^2)}}{1 - \frac{1}{6}g^2}$

359. Riguardando però come rettilineo il triangolo enunciato si avrà (l.743)

$g' = \sqrt{(h^2 - g^2)}$. Quindi $e = \frac{\sqrt{(h^2 - g^2)}}{1 - \frac{1}{6}g^2} - \sqrt{h^2 - g^2}$

$= \frac{g^2 \sqrt{h^2 - g^2}}{6(1 - \frac{1}{6}g^2)} =$ (omettendo anco i termini con quattro dimensioni) $\frac{1}{6} g^2 \sqrt{h^2 - g^2} =$

(l. 607) $\frac{g^2 \sqrt{(h^2 - g^2)}}{6r''r''r''} =$ (per avere in secondi di l.608 questa espressione) $\frac{g^2 \sqrt{(h - g^2)}}{6r''r''}$.

Quindi bisogna avvertire per l'uso di questa formula che i lati h, g si suppongono dati in secondi che il loro numero è quello che dee prendersi per essi nel calcolo di essa, e che il risultato è sempre dato in secondi, come vedremo in un esempio quì appresso.

PROB. II.

Siasi ora nello stesso modo e nello stesso triangolo trovato il valor di h *per mezzo de' due lati* g g'. *Cerco l' errore e da correggersi* .

360. Nel problema precedente si trattò di assegnare l' errore commesso sopra un lato obliquo di un picciolo triangolo sferico rettangolo mercè la cognizione dell' ipotenusa e l' altro lato, allorchè si considera come rettilineo, ed in questo se ne cerca quello sull' ipotenusa, mercè la cognizione de' due lati obliqui. Quindi prendo dal problema precedente, onde evitare la repetizione del medesimo calcolo, la equazione

$h^2 = g^2 + g'^2 - \frac{1}{3} g^2 g'^2$ e ne ho $h = \sqrt{(g^2 + g'^2 - \frac{1}{3} g^2 g'^2)}$. Sviluppando questo trinomio, e considerando soltanto i termini con quattro dimensioni, si avrà $h = \sqrt{(g^2 + g'^2)} - \frac{g^2 g'^2}{6\sqrt{(g^2 + g'^2)}}$.

Quindi essendo per un triangolo rettilineo

$h = \sqrt{g^2 + g'^2}$, sarà $e = -\frac{g^2 g'^2}{6\sqrt{(g^2 + g'^2)}}$.

$$=(l.607) - \frac{g^2 g''^2 : r''^4}{\frac{6\sqrt{(g^2+g''^2)}}{r''}} = -\frac{g^2 g''^2}{6\, r''^3 \sqrt{(g^2+g''^2)}} =$$

(per averne la correzione l.608 in secondi) =

$$\frac{g^2 g''^2}{6\sqrt{r''^2(g^2+g''^2)}}\,.$$

361. In questo e nel problema precedente abbiamo trattato due casi del paragone de' piccioli triangoli sferici rettangoli co' rettilinei. Noi ne dovremo considerare altri diversi, se vorremo compire questo paragone. Ma i due già considerati, e gli altri tre che ne considera l'autore delle lezioni (l. 864), sono bastanti onde insegnarci come guidar ci dobbiamo in qualunque degli altri. Diamo intanto un'applicazione del caso (359) onde veder l'uso delle formule di questo paragone, giacchè il detto autore non ne fa cenno alcuno, e passiamo quindi a mostrar così di passaggio un'altra specie di paragone fra le due trigonometrie, di cui l'autore stesso non parla: quello cioè di un triangolo sferico col rettilineo formato delle corde de' lati suoi.

Sia $h = 5° 36' 50'' = 20210''$, $g = 4° 1' 13'' = 14473''$ e si avrà il calcolo seguente.

$$l(h-g) = l\ 5737 = 3,7586848$$
$$l(h+g) = l\ 34683 = 4,5401167$$

$$\text{somma} = 8,2988015$$

$$l\sqrt{(h^2-g^2)} = \frac{1}{2}\ \text{somma} = 4,1494007 = l\ 14106''$$

$$2\ l\ g = 2\ l\ 14478 = 8,3211172$$
$$\text{cos}\ 6 = 9,2218488$$
$$2\ \text{cos}\ r'' = (l.608)\ 9,3711498$$

$$l\ e = 1,0635165 = l\ 11'$$

Quindi $g' = e + \sqrt{(h^2-g^2)} = 14106''+11'' = 3°55'17''$ senza un secondo di errore.

362. Due casi si possono incontrare nel paragone di un triangolo sferico col rettilineo corrispondente: di un lato cioè o di un angolo del primo col lato o angolo corrispondente del secondo. Il primo che si riduce a trovar la differenza tra l'arco e la sua corda, non soffre alcuna difficoltà: e ciò perchè si ha prontamente dalla prima equazione indefinita (I.727), si ha cioè con quanto approssimazione si vuole dalla equazione

$a - \text{sen}\, a = \frac{a^3}{2\cdot 3}\left(1 - \frac{a^2}{4\cdot 5} + \frac{a^4}{4\cdots 7} - \text{ec.}\right)$ cioè

(supposto $a = \frac{1}{2}x$) dalla $x - 2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}x = x - \text{cord.}\,x =$

$$\frac{x^3}{2^3 3}\left(1 - \frac{x^2}{2^2 4\cdot 5} + \frac{x^4}{2^4 4\cdots 7} - \frac{x^6}{2^6 4\cdots 9} + \text{ec.}\right)$$

Quindi tutte le ricerche in questa nuova specie di paragone si riduce al solo caso secondo.

Per soddisfarvi dico (l. Fig. 120) l, l' i lati del triangelo sferico intorno all' angolo A che si dee paragonare col rettilineo corrispondente $mAn = a$; ed l'' il terzo lato di esso; ed avrò (l.859) $\text{cos}\, l'' = \text{sen}\, l\, \text{sen}\, l' \text{cos}\, A + \text{cos}\, l\, \text{cos}\, l'$, cioè (l.705) $1 - 2\,\text{sen}^2 \frac{1}{2} l'' = \text{sen}\, l\, \text{sen}\, l' \text{cos}\, A + (1 - 2\,\text{sen}^2 \frac{1}{2} l)(1 - 2\,\text{sen}^2 \frac{1}{2} l')$. Quindi $\text{sen}^2 \frac{1}{2} l'' = \text{sen}^2 \frac{1}{2} l + \text{sen}^2 \frac{1}{2} l' - \frac{1}{2}\text{sen}\, l\, \text{sen}\, l' \text{cos}\, A - 2\,\text{sen}^2 \frac{l}{2}\text{sen}^2 \frac{l'}{2}$.

Dalle formule inoltre (l.767) della tria

gonometria rettilinea io ottengo $\text{sen}^2 \frac{1}{2} l'' =$

$= \text{sen}^2 \frac{l}{2} + \text{sen}^2 \frac{1}{2} l' - 2 \,\text{sen} \frac{1}{2} l \,\text{sen} \frac{1}{2} l' \cos a$.

Quindi paragonando queste due espressioni di $\text{sen}^2 \frac{l''}{2}$, trovo che $\cos a = \text{sen} \frac{1}{2} l \,\text{sen} \frac{1}{2} l' +$

$$\frac{\text{sen}\, l \,\text{sen}\, l'}{4 \,\text{sen} \frac{1}{2} l \,\text{sen} \frac{1}{2} l'} \cos A = \text{sen} \frac{1}{2} l \,\text{sen} \frac{1}{2} l' +$$

$\cos \frac{1}{2} l \cos \frac{1}{2} l' \cos A$.

363. Osservando questa formula veggo che se $A = 90°$, sarà $\cos a = \text{sen} \frac{1}{2} l \,\text{sen} \frac{1}{2} l' < 1$, e però $a < 90°$, ed $A > a$; che se $A < 90°$, sarà $\cos A -$

$$\cos a = \left(1 - \cos \frac{1}{2} l \cos \frac{1}{2} l'\right) \left(\cos A - \frac{\text{sen} \frac{l}{2} \,\text{sen} \frac{l'}{2}}{1 - \cos \frac{l}{2} \cos \frac{l'}{2}}\right)$$

$=$ (notando con m una quantità positiva qua-

lunque) $\pm m$, e però cos$A>$, o $<$ cos$a$, ed $A<$, o $>a$, secondo che cos$A>$, o $<$ di

$$\frac{\text{sen}\frac{l}{2}\,\text{sen}\frac{l'}{2}}{1-\cos\frac{l}{2}\cos\frac{l'}{2}}$$

; che se finalmente $A>90°$, sarà sempre cos$A$ — cos$a = -m$, e però sempre cos$A<$ cos$a$, ed $A>a$. Quindi conchiudo che A è sempre maggiore di a, fuorchè nel caso soltanto in cui con esso acuto si ha cos$A>$

$$\frac{\text{sen}\frac{l}{2}\,\text{sen}\frac{l'}{2}}{1-\cos\frac{l}{2}\cos\frac{l'}{2}}$$

: caso in cui ne è minore.

364. La formula (A) come ci dà il coseno dell'angolo rettilineo a in funzione di due lati, e dell'angolo contenuto del triangolo sferico; così ci può dare mercè un'opportuna sostituzione il valor del coseno dell'angolo sferico A in funzione di due lati e dell'angolo da essi compreso del triangolo rettilineo. In effetto se chiamiamo g, g' questi lati, noi avremo sen$\frac{l}{2}=\frac{g}{2}$, sen$\frac{l'}{2}=\frac{g'}{2}$,

$\cos\frac{l}{2} = 1 - \frac{1}{4}g^2$, e

$\cos\frac{l'}{2} = 1 - \frac{1}{4}g'^2$: e quindi $\cos a = \frac{1}{2}gg' + (1 - \frac{1}{4}g^2)(1 - \frac{1}{4}g'^2)\cos A$; cioè $\cos A =$

$$\frac{4\cos a - gg'}{4(1-\frac{1}{4}g^2)(1-\frac{1}{4}g'^2)}.$$

Noi non ci dilunghiamo di vantaggio sulle conseguenze che si possono dedurre dalle formula del paragone di cui si tratta. Ci basta di averne dato un'idea generale, e di citarne il Cagnoli (Op. cit.) per vederne il dippiù.

PROB. 12.

Nel triangolo (Fig. 118.) *sferico* SPT *in cui sieno dati i due angoli* P = h, T = 180° − z, *e i due lati* PT = 90° − l, TS = 90° − a, *suppongo che l'arco* PS *passi in* Pr *scorrendo l'arco* Sr = da = q. *Cerco* I. *la differenza* dh, *ovvero l'angolo* SPr; II. *la differenza* df, *cioè* PS − Pr.

365. L'Astronomia presenta molte diverse questioni, in cui si è obligato a supporre un triangolo che varia o interamente o in parte. Un

triangolo per variare non può conſervare coſtanti più di due delle ſei quantità che ſi conſiderano nelle trigonometrie. Quindi tutte le queſtioni che proper ſi poſſono ſulla variazione de'triangoli non poſſono ſupporre coſtanti che due, una, o niente delle lor ſei quantità. La enunciazione di queſto problema non ſi verſa che ſopra un caſo della variazione de' triangoli sferici, in cui due parti del triangolo ſono ſuppoſte coſtanti, caſo in cui eſſendo le coſtanti un lato e l' angolo adjacente, domanda I. la variazione dell' angolo adjacente al lato coſtante; e II. la variazione del lato oppoſto all'angolo coſtante.

La teoria della variazione de' triangoli, detta altrimenti teoria delle analogie differenziali, intereſſa continuamente, come ſopra cennai e come può vederſi col fatto (Cagnoli Op. cit. Cap XXI), le ricerche aſtronomiche. Quindi è deſſa un ramo delle matematiche pure indiſpenſabile a chi vorrà inoltrarſi in quell' altro delle matematiche miſte. Il Cagnoli ha per così dire eſaurito queſto ſoggetto in quell' opera da noi più volte citata, e che gli ha fatto tanta gloria ed onore. Queſt' opera è oggi divenuta comune, e perciò mi diſpenſa ad occuparmi quì di propoſito ſu queſto ramo così neceſſario. Io non dò adunque che lo

ſviluppo ſoltanto del caſo propoſto in queſto problema: e ciò non per altro che per ſoddisfare da una parte all' enunciazione di eſſo, e per darne dall' altra un' idea a chi ne ſarà interamente digiuno, incoraggiandolo a vederne un ſaggio tutto nuovo e compito nell' opera citata dell' illuſtre Cagnoli.

Pria di venire a queſto ſviluppo io rifletto che ſupponendo Sr per rapporto a BS col ſegno più, dobbiamo ſupporlo col ſegno meno rapporto a TS. Quindi ne' calcoli ſeguenti in cui l' arco impiegato è TS e non BS, dee ſupporſi $Sr = -\,da = -q$. Dopo ciò paſſiamo al queſito

I. Il triangoletto PrS ci dà (l 802) ſen SPr = $\frac{\text{ſen } Sr \text{ ſen } S}{\text{ſen } Pr}$, cioè ſen $h = -$

$$\frac{\text{ſen d}a \text{ ſen } S}{\text{ſen}(PS - \text{d}PS)} = -\frac{\text{ſen d}a \text{ cof } l \text{ ſen } h}{\text{cof } a \text{ ſen}(PS - \text{d}PS)} =$$

Quindi prendendo dh, da per ſen dh, ſen da, che ſenza timore di error ſenſibile può farſi non ſolo entro a' limiti aſſegnati (310), ma ſpeſſo ancora fuor di eſſi nel caſo noſtro che appartiene a' triangoli sferici, come (Cagnoli op. cit. art. 723) può col fatto convingerſi: dippiù prendendo ſen PS = ſen $(90° - f)$ per ſen $(PS - \text{d}PS)$, che

può farsi con tanta più sicurezza quanto più picciolo è l' arco PS; e ciò perchè tanto meno sensibile è il cambiamento de' seni; si avrà $dh = -\frac{da \operatorname{sen} h \cos l}{\cos a \cos f} =$ (supposto $\frac{da}{\cos a} = p$) $-\frac{p \operatorname{sen} h \cos l}{\cos f}$; risultato tutto corrispondente a quello dato dall' autore delle lezioni.

Tra le quantità che l' enunciazione suppone conosciute io non trovo f, e perciò il trovato valor di dh dipende da una quantità a noi tutta ignota. Per eliminarla io mi avveggo che il triangolo PTS dà $\cos f = \frac{\operatorname{sen} z \cos a}{\cos h}$; e perciò che ci dà il mezzo a trasformare in $dh = -\frac{da \cos l \operatorname{sen}^2 h}{\operatorname{sen} z \cos^2 a}$ il risultato dell' autore delle lezioni.

II. Lo stesso triangoletto PSr ci dà (l. 855) $\tan \frac{1}{2}(PS - Pr) = \tan \frac{1}{2} d\, PS =$

$$\tan \frac{1}{2} rS \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(PrS - S)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(PrS + S)} = -$$

$$\tan\frac{1}{2}da\,\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(180^\circ - PrT - S)}{\text{sen}\,\frac{1}{2}(180^\circ - PrT + S)} = -$$

$$\tan\frac{1}{2}da\,\frac{\cos(S + \frac{1}{2}dS)}{\cos(S - \frac{1}{2}dS)}$$. Quindi prendendo $\frac{1}{2}dPS$, $\frac{1}{2}da$ per $\tan\frac{1}{2}dPS$, $\tan\frac{1}{2}da$, che può farsi con errore tanto meno sensibile quanto più piccioli sono PS, a; e facendo (310) $\cos(S + \frac{1}{2}dS) = \cos S$, e $\cos\frac{1}{2}dS = 1$; si avrà $dPS = -da\cos S =$ (1861) $-da\,\frac{\cos PT - \cos PS \cos TS}{\text{sen}\,PS\,\text{sen}\,TS} = -$ $da\,\frac{\text{sen}\,l - \text{sen}\,a\,\text{sen}\,f}{\cos a \cos f}$, ovvero (1854) indipendentemente di f che non si suppone conosciuto $dPS = -da\,(\text{sen}\,P\,\text{sen}\,T\cos PT - \cos P\cos T) = -da\,(\text{sen}\,h\,\text{sen}\,z\,\text{sen}\,l + \cos h\cos z)$

366. Questo è il calcolo onde andar direttamente al valore di d PS. L' autore delle lezioni però ci addita una via tutta indiretta; facendo dipendere dal risultato dal primo caso la ricerca di questo secondo. Egli trova il valor di d PS dipendentemente da d h, per cui sostituendo il valore trovato nel primo caso arriva alla risposta di questo. Per vederlo in effetto io ricorro al solito triangoletto PrS, da cui ne ho (l. 860)

$$\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(PS - Pr) = \text{sen}\,\tfrac{1}{2}\,\text{d}\,PS = \tan\tfrac{1}{2}(PrS - S)\tan\tfrac{1}{2}\,SPr\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(PS + Pr) = -\tan\tfrac{1}{2}(180^\circ - PrT - S)\tan\tfrac{1}{2}\,\text{d}\,h\,\text{sen}\,(PS - \tfrac{1}{2}\,\text{d}\,PS) = \cot(S + \tfrac{1}{2}\,\text{d}\,S)\tan\tfrac{1}{2}\,\text{d}\,h\,\text{sen}\,(PS - \tfrac{1}{2}\,\text{d}\,PS).$$

Quindi prendendo $\cot S$, $\text{sen}\,PS$, $\tfrac{1}{2}\,\text{d}\,h$, $\tfrac{1}{2}\,\text{d}\,PS$ per $\cot(S + \tfrac{1}{2}\,\text{d}\,S)$, $\text{sen}\,(PS - \tfrac{1}{2}\,\text{d}PS)$, $\tan\tfrac{1}{2}\,\text{d}\,h$, $\text{sen}\,\tfrac{1}{2}\,\text{d}\,PS$, si avrà $\text{d}\,PS = \text{d}\,h\ \text{sen}\,PS\ \cot S =$

$$(I.860)\, dh \; \text{sen}\, PS \frac{\text{sen}\, PS \cot PT - \cos PS \cot P}{\text{sen}\, P} =$$

$$dh \frac{\cos^2 f \tan l - \text{sen}\, f \cos h \cos f}{\text{sen}\, h} = (I.)$$

$$p(\text{sen}\, l \cos f - \text{sen}\, f \cos h \cos l)$$

Conchiusione generale dell'Opera.

Ecco finalmente arrivati sul termine del nostro lavoro. Noi abbiam dimostrato la regola del massimo comun divisore, tirandola come una specie di corollario dalla teoria delle frazioni continue: abbiam reso tanto in generale ragione di quella sul compendio della divisione e moltiplica de' decimali onde siam venuti a segnar alle cifre de' termini suoi un certo limite, oltre cui essa diviene incerta ed equivoca: abbiamo dato sviluppo a diversi problemi su i primi due gradi e sulle regole a quella del tre subalterne, ond'esser di esercizio pe' giovani, e guidarli così colla pratica in un cammino che non ammette regole e generali principj: abbiam dimostrato non pochi interessanti teoremi che proposti da diversi autori raccolti si trovano nelle lezioni: abbiam dato

un saggio sulle frazioni continue, e con un dettaglio sì generale e sublime, onde sia nel tempo stesso di soccorso ed ajuto in quei problemi aritmetici che senza di esse non sanno risolversi, di uso e destino perlo sviluppo in numeri interi degl' indeterminati; di esempio e di guida per la generalità delle vedute delle conseguenze de' calcoli: abbiam fatto uso di alcuni metodi assai conosciuti in analisi, onde dare un'idea delle applicazioni analitiche; calcolato qualche formula generale, onde mostrar la maniera di unire più casi sotto una sola espressione; scorso con celerità e rapidezza sull' origine, distinzione, somma, ed interpolazion delle serie, onde vedere come esse si generano da' primi principj dell' algebra, come distinguonsi le une dall' altre, come in general sene sommano le ricorrenti, come sene assegnano in un modo semplice e piano quei termini che in esse non veggonsi espressi.

La teoria dell' equazioni, la parte più interessante e più utile dell' analisi finita, è tuttora senza compimento e imperfetta. Il problema onde generalmente risolverle ancor si difende ne' ridotti più interni della sua ritirata: e da' tempi di Leonardo di Pisa, di Luca de Borgo di tutte le forze con cui si è battuto fin' oggi, di tutti i

metodi che immaginati si sono, niuna ha potuto sottemetterlo e vincere, niuno ha saputo completamente rispondervi. I metodi del Ferrari e Tartaglia onde risolvere l' equazioni biquadratiche e cube: l' Algoritmo analitico generalizzato dal Vieta, e semplicizzato quindi dall' Hariot: le ricerche sulla trasformazione dall' equazioni di quello; e le scoverte tanto feconde di questo sulla formazione e natura di esse: il metodo delle indeterminate di Cartesio, e le tanto fertili sue cognizioni sulle negative radici: il teorema di Hudde sulle radici eguali; e quello del genio singolare di Nevvton sulla somma delle potenze lor simili; i travagli sublimi dell' immenso Eulero: i metodi ingegnosi del sommo e laborioso Bezout: le vedute profonde del saggio Varing; l'esame ammirabile del celebre nostro Lagrange: il suo bel lavoro su i limiti delle radici irrazionali, sulla conoscenza e sul numero delle immaginarie: son delle forze è vero e de'metodi onde nel corso di circa tre secoli si è combattuto e strattato il problema, ma de' metodi però e delle forze con cui resiste validamente tuttora, con cui rimane ancora a combattere il forte centrale e inespugnabile forse delle sue resistenze; con cui restando senza soluzione completa e risposta ven-

ghiamo in certa maniera delusi di quelle speranze felici che sul principio concepito si aveano.

Noi scesi sul campo di questo conflitto abbiamo cominciato completamente ad esporre il metodo de' fattori razionali, e colla soluzione numerica dell'equazioni secondo le sublimi vedute dell'immortale Lagrange, abbiam dimostrato il teorema famoso di Nevvton già sopra citato, un teorema sulle funzioni simetriche delle radici, ed un altro perfine onde conoscere il limite superiore di esse. Noi siamo quindi venuti alla soluzione algebrica con cui il Bezout vi ha dato il più grande degli urti, e al suo metodo di eliminazione ond'egli avrebbe innalzato forse un trofeo se la morte venuta non fosse a sì presto rapirlo. Noi abbiamo inseguito preso a trattare quel metodo, che per averne avuta dal Cardano un'idea elementare, può dirsi Cardanico; e che nulla lascerebbe per la vittoria se universalizzar si potrebbe ed estendere ad ogni equazione, se limitato non fosse a quelle soltanto che mancano de' termini pari; se in queste medesime non cadesse alle volte in un caso ove non può a tutto rigore applicarsi. Noi in questo metodo abbiam dato in dettaglio la maniera onde generalmente assegnar la radice delle quantità miste

d' incommensurabili e razionali; abbiamo esaminato la così detta formula Cardanica nella forma della più estesa sua generalità; rilevato i caratteri veri del tanto famoso caso irriducibile; dimostrato col Lorgna l' impossibil sua riduzione; esposto un metodo generale e trigonometrico onde averne in esso le vicine radici. Noi finalmente col dimostrare in un modo tutto pronto e assai piano la proposizione d'Alembertiana sulle radici immaginarie; coll' esporre tre metodi fra loro diversi, onde coll' approssimazione assegnarne le irrazionali; col render ragione di varj altri interessanti teoremi; e coll' eseguir delle altre meno ma sempre importanti ricerche; abbiamo non solo raccolto ma perfezionato eziandio ed aggiunto a quanto dippiù rilevante si sà e di più utile nella teoria in questione; quanto altrove riunito non trovasi; quanto i giovani che nella scienza inoltrarsi pretendono hanno di necessità e di tutto bisogno a conoscere.

L' Analisi indeterminata, quella parte cioè dell' analisi pura che tutta si versa sù delle questioni capaci di varie soluzioni diverse, che avuta la prima sua origine da Diofanto si dice ancor col suo nome, che coltivata con frutto e successo da Bachet e Fermat ha ricevuto dalla mano

maestra dell'Eulero e Lagrange delle pennellate assai vive, e che ciò malgrado essa è inviluppata tuttora e mancante: l'analisi indeterminata io dico è venuta dopo di ciò ad occuparci. Noi ragionando le soluzioni particolari di molti problemi ad essa spettanti, ci siam fatti di guida in un cammino tanto incerto e spinoso: risolvendo per approssimazione l'equazioni quadratiche, siam venuti a convingerci come esse ci portano a delle frazioni continue: generalizzando, disponendo con ordine, e tracciando nella vera sua prospettiva i metodi che Lagrange vi ha dato, abbiam creduto compire e perfezionar tuttocciò che di più importante comprendesi in sì oscura ed imperfetta scienza.

La Geometria nata dalla necessità e dal bisogno, origine comune delle conoscenze dell'uomo, sviluppa alle sponde del Nilo i filamenti più tenui della sua vita, ed acquista la forma i lineamenti di una vera scienza sotto i Taletici in Grecia, e i Pitagorici in Italia: cresciuta nella scuola Platonica, e fra le mani di Archimede e Apollonio: alimentata dal Vieta coll'alimento analitico; fortificata e fatta robusta sotto Cartesio; è oggi forse arrivata coll' invenzione del calcolo di Leibnizio al grado eminente della più

alta sua maturità. Noi non abbiamo avuto nel nostro piano argomento che di entrare in dettaglio soltanto sulla parte elementare di questa vasta e sublime scienza. Noi non siamo stati in questa stessa parte impegnati che nel solo sviluppo di ventotto problemi. E noi avendo ciò fatto nelle vie per lo più dell'analisi abbiam creduto di supplire in un tempo alla geometria delle lezioni, e di farne un soggetto di esercizio e di pratica nell'arte a risolvere i problemi geometrici.

Il ramo della geometria pura perfine che soltanto considera le relazioni e i rapporti fra gli angoli e i lati di un triangolo qualunque; che or ferma sulla superficie terrestre sottomette al calcolo i triangoli rettilinei, ed or volante per gli spazj celesti ne và misurando gli sferici; che generata in uno stato di purità e di schiettezza dal laboriosissimo Hipparco ha oggi vestito un carattere misto ed è divenuta anch' essa analitica: la trigonometria io dico ha formato l'ultimo tratto delle nostre fatighe. Noi collo sviluppare così di passaggio e di fuga diverse questioni sulle linee trigonometriche, coll' applicare a delle funzioni circolari il metodo non solo delle false posizioni (168) che crediamo poterci noi attribuire, ma l' ordinario eziandio e nelle lezioni spiegato,

col sommare in generale e in un modo tutto diverso di quello ha fatto il Fontana, ma simile a quello che il Lorgna ha tenuto nelle memorie della società Italiana, le serie delle potenze simili di seni e coseni di archi in progressione aritmetica; col dimostrare più semplicemente, collo stendere in un piano più contornato ed unito di quello si è fatto, i teoremi di Moivre e di Cotes; coll' eseguire ed esporre diverse ricerche Geodetiche spettanti alla pratica: noi lo dico col far tuttocciò abbiam dato a conoscere molte di quelle teorie che più interessano la parte sua rettilinea. E noi finalmente coll' averci fermati nella parte sua sferica su delle questioni che al calcolo astronomico tutte appartengono; coll'aver calcolato la superficie di un triangolo per mezzo degli angoli secondo il Cavalieri o il Gerard, e per mezzo de' lati secondo un metodo che parte lo dobbiamo ai Cagnoli e parte a noi stessi; coll' aver paragonato in alcuni casi fra esse le due trigonometrie; coll'aver dato un saggio un'idea delle analogie differenziali finite e dovute al Cagnoli, tanto utili ed all' astronomia vantaggiose; abbiam portato sul termine in cui fermar si dovea il nostro lavoro; abbiam soddisfatto e adempito l' impegno in cui fin dal principio fummo ad entrare.

Ridotta adunque al suo termine la nostra raccolta : trattate ed esposte quelle teorie che formar la doveano: compito il piano su di cui dovea stendersi essa e modellare; altro non ci resta che il solo conchiudere. Conchiudiamo adunque, ma conchiudendo per sottrarci da qualunque siasi equivoco riflettiamo, che una raccolta di tante sì rilevante ricerche, quali scorrendone non solo le pagine, leggendone l' avvertimento non solo, ma col solo rifletterne il titolo si resta sul campo convinti, che ci possiamo noi lusingare di poterci tutte attribuire non già per l' assoluta novità del soggetto ma per la relativa bensì alle dimostrazioni o alla maniera di presentarle ed esporle, che tutte stanno da se come a tante dissertazioni e memorie, che la più parte non và in alcun modo dalle lezioni a dipendere, che l' altra più picciola parte, che ne è dipendente, non ne dipende eziandio che come da cognizioni supposte da notizie già note; che una raccolta di tal fatta io ripiglio non può certamente guardarsi come un semplice supplemento un commentario soltanto delle lezioni senza un cadere in inganno sul fine cui tende e sul reale suo contenuto, che l'idea di supplemento di commentario non può affiggersi ad essa che come un' idea subalterna, un' idea secondaria, un' idea pressocchè acciden-

tale; che l'enunciazioni de' problemi sotto cui vanno stese ed esposte le diverse sue teorie, quali sembrano dargliene una principale tutta e primaria, non hanno ad altro oggetto servito che a dare un piano ed un'applicazione alle stesse. Conchiudendo io ripeto per evitar ogni dubbio di oscurità e d'inviluppo, restiamo pur prevenuti che questa raccolta non si è preteso indrizzare a quei giovani, i quali appena iniziati o non molto nella scienza inoltrati, hanno bisogno di una voce tutta viva e maestra; ma a quegli altri, bensì, i quali essendo di ciò che nelle lezioni si dice in pieno possesso, i quali camminar potendo da se nel cammino aspro e difficile che presso ad esse ritrovasi, i quali dotati di amore grande per le lettre e di genio, vanno in cerca a conoscere delle dottrine più complicate e più alte, delle vedute più generali ed estese, delle maniere più grandiose e sublimi, onde poi penetrare ne' tesor più nascosti dell'analisi tutta, percorrer le opere con facilità e speditezza di Autori più classici, innalzarsi al livello de' tratti più eminenti e difficili di sì sterminata scienza. Conchiudendo io ripeto di più per non perdere alcun de' vantaggi che trar si ponno da questa raccolta osserviamo che una lezione non è che la spiega di una certa dottrina; che tanto se le dottrine spiegate sie-

guono un ordine tutto ſeguito dalla più baſſa alla più alta di eſſe, quanto ſe eſſe ſuppongono alcuni principj o camminan per ſalto; che tanto ſe tali dottrine ſono eſpoſte con un diſcorſo continuato ed unito dal principio alla fine, quanto ſe vanno a ſuccederſi in diſſertazioni o memorie; poſſono ſempre ſormare, come l' eſempio d' illuſtri geometri ci autorizza e ci atteſta, un corſo di lezioni compito: e quindi che la noſtra raccolta può giovare ancor eſſa e indrizzarſi come un lavoro finito alla prima claſſe di giovani, col formare eſſa così un corpo di lezioni da poterſi loro dettare; e dettare io dico in maniera quanto le parti in cui ſi comprendono ſoluzioni ſoltanto di ſoli problemi formaſſero delle lezioni di eſercizio ſolo e di pratica. Conchiudendo io finalmente ripeto reſtiam prevenuti che la noſtra raccolta è in ſomma un lavoro finito, un lavoro che tutto regge da ſe, e tutto in ſe indipendente, un lavoro perfine che può indrizzarſi e ſervire, come il geometra ſommo e celebre Aſtronomo P. Piazzi con una ſua da Palermo e coll' imponente autorità del ſuo voto ci fa ſicuri, di giovamento e utilità alla gioventù in generale.

Fine del Secondo ed ultimo Tomo.

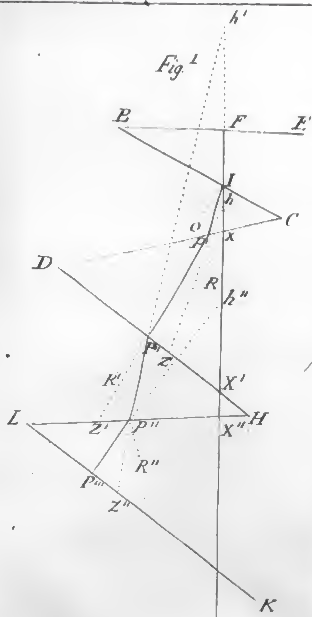


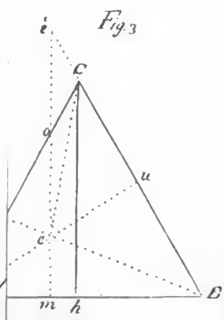
TAVOLA DEGLI ERRORI A CORREGGERSI

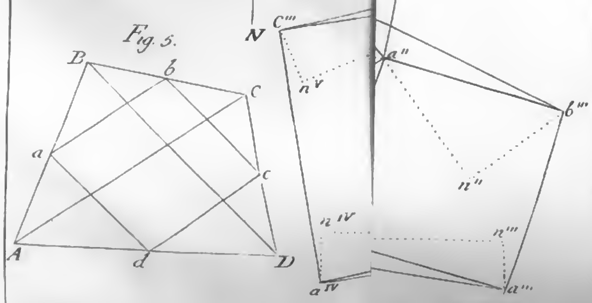
Errori	*Correzioni*
Pag. 8. l. 7 29	2y
11. l. ult. 286	285.
14. l 15 ed alla	ed
17 l. 9 però	può
19 l. 3, l. ult. (*bc*, *t* = *b*	(*b*, t = − *b*
20 l. 10 *D* : 2	*p* : 2
21. l 10 6	*b*
23. l. 2 ∓ (	+ (
31. l. 16., l. 17. sono, *a*	sieno, *n*
33. l 19. + *f*	*f* +
37. l. 3 Quindi	così
43. l. 7, l. 10 k, *K*	K, k
44. l. 6. *i*'	*l*
83 l. 9 *y*'''	*y*'''
84. l. 21. *y*''	*q*'
121. l. 11. *E*'F'	*C*'*F*'
123. l. ult. *ca*, *cb*, ec.	*cA*, *cB*, ec.
132 *l*. 6 1:4	1:2
154. l. 6 3 . 4	3
155 l. 13, l. 15 *r* : 2, *r*'	2*r*, *r*
160. l. 4, l. 14 sen 2 *u*, *m* sen 2 *z*	*m*, *m* sen 2
167. l. ult. cos *n*2	cos 2*n*
179 . l. ult, *nb*)	*n*)*b*
189. l. 12. *Am*,	A*m* 1
190. l. 9, (*h*)	(k)
197. l. 16. continete	continente
205. l, 12, l. 17. > , <	< , >
206. 11, tan 2 *a*:2	cot 2 *a*:2
208. l. 3. sia	sia (l. Fig. 106)
211. l. ult. cos *g*) = −	cos *g*) =
213. l 9 − cos 1 : 2(*a* +	− cot 1 : 2(*a* +
218 l. 1. l. 9. sen (*f* ±, posti	sen *f* ± (, loro posti
219. l. 3. cot *PTS*	cot *TPS*
225. l. 1 tan *m* : 2	cot *m* : 2 in *n*
226 l. 15. esprimere	esprimere in secondi
230. l. 1 *g*')2	*g*'2)
238. l. 11. cos *h*	sen *h*

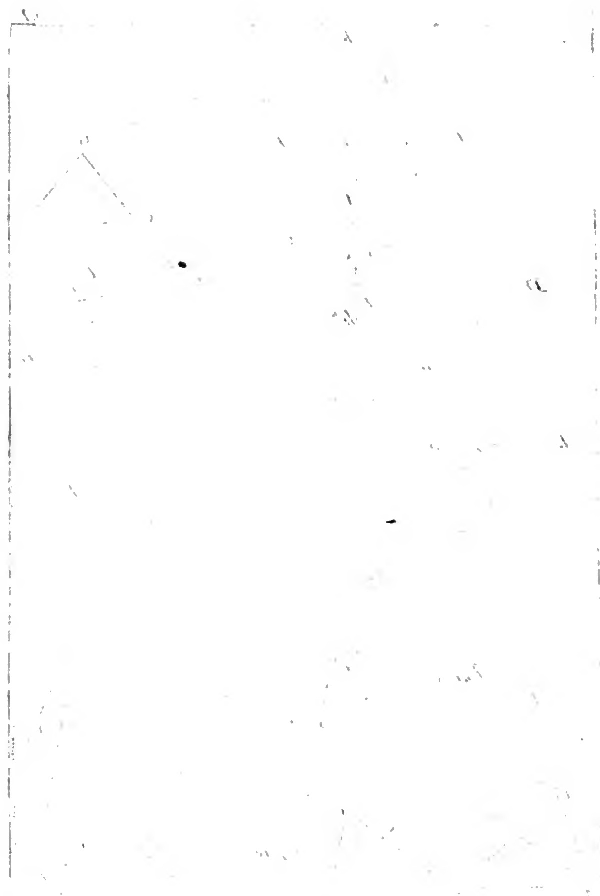
TAVOLA DELLE MATERIE

Tav. 1.

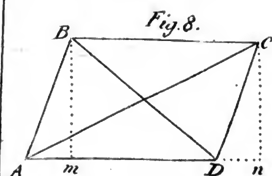

Fig. 1
h'
B
F
E
I
h
C
o
P
x
D
R
h''
P'
Z
K'
X'
L
Z'
P''
X''
H
R''
P'''
Z''
K
N

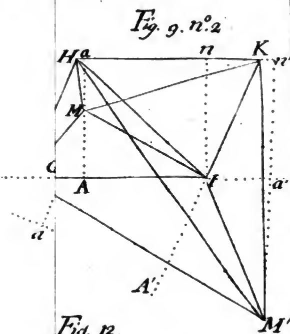

i
Fig. 3
C
o
u
c
E
m
h

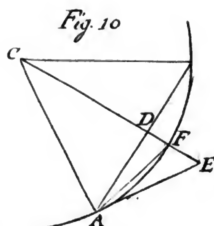

Fig. 5.
B
b
C
a
c
A
d
D
b IV
C'''
a''
n V
b'''
n''
n IV
n'''
a IV
a'''

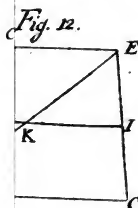


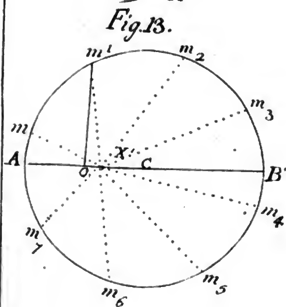
Tav. 2.

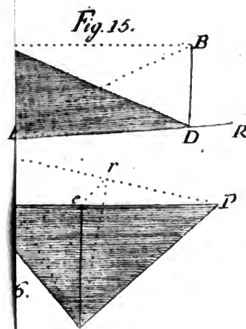

Fig. 8.
B
C
A
m
D
n


Fig. 9. n.° 2
H a
n
K
n'
M
A
a'
a
A'
M'


Fig. 10
C
D
F
E
A


Fig. 12.
E
I
K
C


Fig. 13.
m1
m2
m3
m
A
X'
C
O
B'
m4
m7
m5
m6


Fig. 15.
B
D
R
r
c
P





